XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se $AP + AB = CB$, prove que API é um triângulo isósceles.

PROBLEMA 2

Seja n um inteiro, $n \geq 3$. Definimos $f(n)$ como a maior quantidade possível de triângulos isósceles cujos vértices pertencem a algum conjunto de n pontos do plano sem três pontos colineares. Prove que existem constantes positivas a e b tais que $an^2 < f(n) < bn^2$, para todo n inteiro, $n \geq 3$.

PROBLEMA 3

Determine todas as funções $f : R \to R$ tais que

$$f\big(xf(y) + f(x)\big) = 2f(x) + xy$$

para todos x, y reais.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Um número inteiro positivo é *arrojado* quando tem 8 divisores positivos cuja soma é 3240. Por exemplo, o número 2006 é arrojado porque seus 8 divisores positivos, 1, 2, 17, 34, 59, 118, 1003 e 2006, somam 3240. Encontre o menor número inteiro positivo arrojado.

PROBLEMA 5

Seja P um polígono convexo de 2006 lados. As 1003 diagonais ligando vértices opostos e os 1003 segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos são concorrentes, ou seja, todos os 2006 segmentos possuem um ponto em comum. Prove que os lados opostos de P são paralelos e congruentes.

PROBLEMA 6

O professor Piraldo participa de jogos de futebol em que saem muitos gols e tem uma maneira peculiar de julgar um jogo. Um jogo com placar de m gols a n gols, $m \geq n$, é dito *equilibrado* quando $m \leq f(n)$, sendo $f(n)$ definido por $f(0) = 0$ e, para $n \geq 1$, $f(n) = 2n - f(r) + r$, onde r é o maior inteiro tal que $r < n$ e $f(r) \leq n$.

Sendo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, prove que um jogo com placar de m gols a n, $m \geq n$, está equilibrado se $m \leq \phi n$ e não está equilibrado se $m \geq \phi n + 1$.