12ª Olimpíada de Matemática da CPLP Portugal

Oeiras, 25/07/2024

Primeiro dia

1. Determine as progressões geométricas tais que o produto dos três primeiros termos é 64 e a soma deles é 14.

   Nota: Os números a_1, a_2, a_3, ... *formam uma progressão geométrica se existe um número real* k *tal que* $a_{n+1} = k \cdot a_n$, *para todo o* n.

2. Para cada conjunto de cinco inteiros $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, seja P_S o produto de todas as diferenças entre dois deles, isto é,

   $$P_S = (a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_1)(a_2-a_1)(a_5-a_2)(a_4-a_2)(a_3-a_2)(a_5-a_3)(a_4-a_3)(a_5-a_4)$$

   Determine o maior inteiro n tal que, dado qualquer conjunto S de cinco inteiros, n divide P_S.

3. Seja ABC um triângulo cuja circunferência inscrita tem centro I. Uma reta r que passa por I interseta as circunferências circunscritas aos triângulos AIB e AIC nos pontos P e Q, respetivamente. Prove que o circuncentro do triângulo APQ pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Duração: 4 horas e 30 minutos

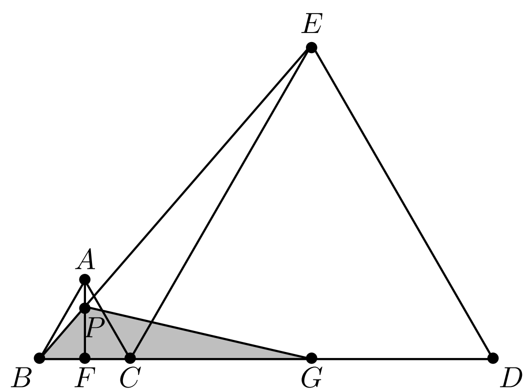
Cada problema vale 7 pontos

12ª Olimpíada de Matemática da CPLP Portugal

Oeiras, 26/07/2024

Segundo dia

4. Na figura, os triângulos ABC e CDE são equiláteros, de lados 1 e 4, respetivamente. Além disso, B, C e D são colineares e F e G são os pontos médios de BC e CD, respetivamente. Seja P o ponto de interseção de AF com BE. Determine a área do triângulo sombreado BPG.



5. Num tabuleiro quadriculado 9×9, as suas casas são numeradas de 11 a 99, com o primeiro algarismo a indicar a linha e o segundo a coluna.

   Pretende-se pintar as casas de preto ou branco de forma a que cada casa preta seja adjacente a, no máximo, outra casa preta e cada casa branca seja adjacente a, no máximo, outra casa branca. Duas casas são adjacentes se tiverem uma aresta em comum.

   Quantas formas existem de pintar o tabuleiro, de modo que as casas 44 e 49 sejam pretas?

6. Um inteiro positivo n é chamado de *oeirense* se existirem dois inteiros positivos a, b, não necessariamente distintos, tais que $n = a^2 + b^2$.

   Determine o maior inteiro k para o qual existem infinitos inteiros positivos n tais que $n, n+1, \ldots, n+k$ são oeirenses.

Duração: 4 horas e 30 minutos — Cada problema vale 7 pontos