XXX^a OLIMPÍADA de MAIO

Primeiro Nível

Maio de 2024

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1

Encontre todos os números de dois algarismos que satisfazem a seguinte condição: se multiplicarmos seus dois algarismos, o resultado é igual à metade do número.
Por exemplo, 24 não atende à condição, porque $2 \cdot 4 = 8$ e 8 não é a metade de 24.

PROBLEMA 2

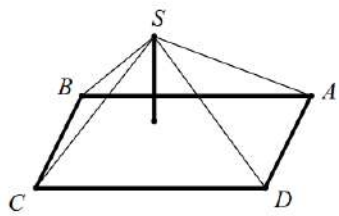
Um número é *especial* se seu algarismo das dezenas é 9. Por exemplo, 499 e 1092 são especiais, mas 509 não é. Diego tem vários cartões. Em cada um deles ele escreveu um número especial (é possível escrever o mesmo número em mais de um cartão). Somando os números dos cartões, o resultado é 2024. Qual é a menor quantidade de cartões que Diego pode ter?
Dê um exemplo com esse número de cartões e explique por que com menos cartões é impossível que a soma seja igual a 2024.

PROBLEMA 3

Beto possui um tabuleiro quadriculado em que o número de linhas e o número de colunas são números consecutivos (por exemplo, 30 e 31).
Ana tem peças retangulares de duas cores e tamanhos diferentes: as peças vermelhas são 5×7 e as fichas azuis são 3×5. Ana percebeu que poderia cobrir todas as casas do tabuleiro de Beto usando apenas peças vermelhas, que podem ser giradas, mas sem sobrepô-las ou deixá-las sair do tabuleiro. Depois se deu conta de que poderia fazer o mesmo usando apenas peças azuis.
Qual é a menor quantidade de casas que pode ter o tabuleiro do Beto?

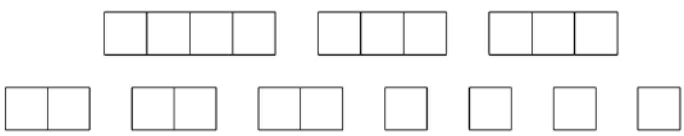
PROBLEMA 4

Um náufrago está construindo uma jangada retangular $ABCD$. Ele fixou um mastro perpendicular à jangada com cordas passando pela extremidade do topo do mastro (ponto S na figura) até os quatro cantos do jangada. A corda SA mede 8 metros, a corda SB mede 2 metros e a corda SC mede 14 metros.
Calcule o comprimento da corda SD.



PROBLEMA 5

A batalha naval é jogada em um tabuleiro quadriculado 10×10. Uma *frota* consiste em 10 "navios": um que ocupa 4 casas do tabuleiro, dois que ocupam 3 casas, três que ocupam 2 casas e quatro que ocupam 1 casa (ver figura).
Os navios podem ser dispostos na posição horizontal ou vertical, mas não é permitido que dois navios se toquem, nem mesmo em um canto.



Respeitando-se as regras, é possível colocar duas frotas no mesmo tabuleiro?

XXX^a OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2024

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1
Há um tabuleiro quadriculado de 4×8 dividido em 32 quadrados 1×1 e peças de 1×1 , 2×2 , 3×3 e 4×4. Queremos cobrir completamente o tabuleiro usando exatamente n dessas peças.
a) É possível fazer isso se $n = 19$?
b) É possível fazer isso se $n = 14$?
c) É possível fazer isso se $n = 7$?
Em cada caso, se a resposta for sim, mostre uma forma de cobrir o tabuleiro, e se a resposta for não, explique por que é impossível.
Esclarecimento: As peças não podem se sobrepor ou sair do tabuleiro.

PROBLEMA 2
Dizemos que um inteiro positivo n é *bom* se o resultado da multiplicação dos primeiros n inteiros positivos ímpares usam apenas os dígitos 1, 3, 5 e 9. Por exemplo, $n = 3$ é bom, porque$1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$, mas $n = 4$ não é, porque$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.
Encontre todos os números bons.

PROBLEMA 3
Ana escreve uma lista infinita de números com o seguinte procedimento. O primeiro número da lista é um número inteiro positivo a escolhido por Ana. A partir daí, cada número da lista é obtido calculando a soma de todos os inteiros entre 1 e o último número escrito. Por exemplo, se $a = 3$, a lista de Ana começa com

$$3, 6, 21, 231, \dots$$

porque $1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, 1 + 2 + 3 + \dots + 21 = 231$.
Determine se é possível que todos os números da lista de Ana sejam pares.

PROBLEMA 4
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e sejam M, N, P, Q os pontos médios dos lados AB, CD, BC, DA respectivamente. A linha MN corta os segmentos AP e CQ em X e Y, respectivamente. Suponha que $MX = NY$.
Mostre que $área(ABCD) = 4 \cdot área(BXDY)$.

PROBLEMA 5
Lula Molusco é uma peça que se move em um tabuleiro da seguinte maneira: avança três quadrados em uma direção e depois dois quadrados em uma direção perpendicular. Por exemplo, na figura a seguir, fazendo um movimento, o Lula Molusco pode se mover para qualquer um dos 8 quadrados indicados com as setas. Inicialmente, há um Lula Molusco em cada um das 35 casa de um tabuleiro de jogo 5×7. Ao mesmo tempo, cada um deles faz exatamente um movimento. Qual é o menor número possível de quadrados vazios após esses movimentos?