



X Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (OMCPLP)
Cidade de Maputo, Moçambique, 02 de Novembro de 2022

01.

Quantas triplas de reais (a, b, c) satisfazem o sistema a seguir?

$$\begin{cases} a^4 - b^4 = c \\ b^4 - c^4 = a \\ c^4 - a^4 = b \end{cases}$$

02.

Anselmo e Cláudio jogam alternadamente um jogo com frutas em uma caixa. A caixa tem inicialmente 32 frutas. Anselmo joga primeiro e cada jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 frutas da caixa ou retirar $2/3$ das frutas da caixa (essa jogada só é possível caso o número de frutas na caixa seja múltiplo de 3). O jogador que retirar a última fruta da caixa vence. Qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora? Como este jogador deve jogar para vencer?

03.

Os inteiros positivos x e y são tais que $x^{2022} + x + y^2$ é divisível por xy .

- Dê um exemplo de tais inteiros x e y , com $x > y$.
- Prove que x é um quadrado perfeito.



X Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (OMCPLP)
Cidade de Maputo, Moçambique, 03 de Novembro de 2022

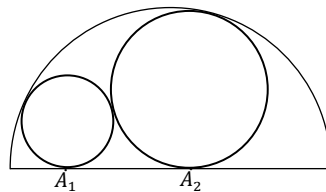
04.

Quantas soluções inteiras existem para a equação abaixo?

$$x + 4y - 343\sqrt{x} - 686\sqrt{y} + 4\sqrt{xy} + 2022 = 0$$

05.

Duas circunferências de raios R_1 e R_2 são tangentes externamente entre si. Além disso, elas são tangentes a um semicírculo de raio 1, conforme ilustra a figura:



- Se A_1 e A_2 são os pontos de tangência das circunferências com o diâmetro do semicírculo, calcule o comprimento de $\overline{A_1A_2}$.
- Prove que $R_1 + R_2 = 2\sqrt{R_1R_2}(\sqrt{2} - \sqrt{R_1R_2})$.

06.

Um colar contém 2024 pérolas, cada uma tendo uma das seguintes cores: preto, verde e amarelo. A cada momento, podemos trocar simultaneamente cada pérola por uma nova seguindo as seguintes regras:

- Se as suas duas vizinhas são de uma mesma cor, então ela será trocada para esta mesma cor;
 - Se as duas vizinhas são de cores diferentes, então ela será trocada para a terceira cor.
- Existe algum colar que pode ser transformado em um colar unicamente composto por pérolas amarelas se no início metade das pérolas são pretas e a outra metade é verde?
 - Existe um colar que pode ser transformado em um colar unicamente composto por pérolas amarelas se inicialmente 998 pérolas são pretas e as 1026 restantes são verdes?