35ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Primeiro Dia

Fortaleza, 27 de Setembro de 2024

Problema 1. Prove que existem infinitos inteiros positivos a, b, c, d tais que

$$ab + 1, \quad bc + 16, \quad cd + 4, \quad da + 9$$

sejam quadrados perfeitos.

Problema 2. Sejam ABC um triângulo e A_1 e A_2 pontos sobre o lado BC, B_1 e B_2 pontos sobre o lado CA e C_1 e C_2 pontos sobre o lado AB, de modo que $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ seja um hexágono convexo e B, A_1, A_2 e C estejam, nessa ordem, situados sobre o lado BC.

Dizemos que os triângulos AB_2C_1, BA_1C_2 e CA_2B_1 são *coláveis* se existirem um triângulo PQR e pontos X, Y e Z sobre os lados QR, RP e PQ, respectivamente, tais que AB_2C_1 seja congruente a PYZ nessa ordem, BA_1C_2 seja congruente a QXZ nessa ordem e CA_2B_1 seja congruente a RXY nessa ordem.

Prove que os triângulos AB_2C_1, BA_1C_2 e CA_2B_1 são coláveis se, e somente se, os baricentros de $A_1B_1C_1$ e de $A_2B_2C_2$ coincidirem.

Nota: o triângulo FGH é congruente ao triângulo IJK nessa ordem se $FG = IJ$, $GH = JK$ e $HF = KI$.

Problema 3. Encontre todos os inteiros positivos n tais que $3^n - 2^n - 1$ seja um quadrado perfeito.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 10 pontos

35ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Segundo Dia

Fortaleza, 28 de Setembro de 2024

Problema 4. Para cada número inteiro positivo N com um número par $2k$ de algarismos, o número *trocado* de N é o número formado quando passamos os k primeiros algarismos de N para o final, sem alterar a ordem. Por exemplo, se $N = 123456$, o número formado pela primeira metade dos algarismos é 123, o formado pela segunda metade é 456 e o trocado é 456123; se $N = 2304$, o trocado de N é 423. Um número inteiro positivo C é dito *cearense* se as três seguintes condições forem satisfeitas:

(i) C possui uma quantidade par de algarismos.

(ii) O número formado pela primeira metade dos algarismos de C e o número formado pela segunda metade dos algarismos de C são primos entre si.

(iii) C divide o trocado de C.

Determine os dois menores números cearenses.

Problema 5. Uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é *mágica* se cada termo j dela tiver ao menos $\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$ números menores que ele à sua esquerda.

Por exemplo: $(1, 3, 4, 2, 5)$ é mágica; $(1, 5, 2, 3, 4)$ não é mágica, já que o 5 não tem ao menos $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$ números menores que ele à sua esquerda.

Para cada n natural, determine o número de permutações mágicas de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Nota 1: $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro que é menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 20 \rfloor = 20$.

Nota 2: uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma maneira de listar os elementos desse conjunto em uma certa ordem. Por exemplo, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$ são todas as permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Problema 6. Em um tabuleiro 8×8 há 64 fichas iguais, uma em cada casa. Arnaldo e Bernaldo se colocam em um mesmo lado do tabuleiro e jogam alternadamente, com Arnaldo começando. O jogador da vez escolhe uma ficha e a movimenta, ou uma casa para a direita ($\rightarrow$), ou uma casa para cima ($\uparrow$) ou uma casa diagonalmente para cima, à direita ($\nearrow$). Se a ficha for movida para uma casa já ocupada, ambas as fichas são retiradas do tabuleiro. O jogador que não puder mais realizar nenhum movimento, perde. Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora?

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 10 pontos