39^{a} Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Primeiro Dia

21 de setembro de 2024

Problema 1. Para cada inteiro positivo n, designamos por $d(n)$ o número de divisores positivos de n. Demonstre que para todo par de inteiros positivos (a, b) se verifica que

$$d(a) + d(b) \leq d(\mathrm{mdc}(a, b)) + d(\mathrm{mmc}(a, b))$$

e determine os pares de inteiros positivos (a, b) para os quais se verifica a igualdade.

Nota: $\mathrm{mdc}(a, b)$ é o máximo divisor comum de a e b, e $\mathrm{mmc}(a, b)$ é o mínimo múltiplo comum de a e b.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam M e N os pontos médios de AB e AC, respectivamente. Dado um ponto D no interior do segmento BC com $DB < DC$, sejam P e Q as interseções de DM e DN com AC e AB, respectivamente. Seja $R \neq A$ a interseção do circuncírculo do triângulo PAQ com o circuncírculo do triângulo NAM. Se K é o ponto médio de AR, demonstre que $\angle MKN = 2\angle BAC$.

Problema 3. Seja O um ponto fixo no plano. Temos 2024 pontos vermelhos, 2024 pontos amarelos e 2024 pontos verdes no plano, em que não há três pontos colineares e todos são distintos de O. Sabe-se que para quaisquer duas cores, a envoltória convexa dos pontos destas cores contém O (nos seus lados ou interior). Dizemos que um ponto vermelho, um ponto amarelo e um ponto verde formam um triângulo *boliviano* se esse triângulo contém o ponto O (nos seus lados ou interior). Determine o maior inteiro positivo k tal que, sem importar como se coloquem os pontos, sempre há pelo menos k triângulos bolivianos.

Nota: A *envoltória convexa* de um conjunto finito S de pontos no plano, é aquele polígono convexo que contém todos os pontos de S (nos seus lados ou interior) e cujos vértices são todos pontos de S.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

39^{a} Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Segundo Dia

22 de setembro de 2024

Problema 4. Colorimos de vermelho alguns pontos do plano de maneira que se P e Q são dois pontos vermelhos, e X é um ponto tal que o triângulo PQX tem ângulos de $30°, 60°, 90°$ (em alguma ordem), então X também é vermelho. Se os vértices A, B e C de um triângulo são todos vermelhos, demonstre que o baricentro do triângulo ABC também é vermelho.

Nota: O *baricentro* de um triângulo é o ponto de interseção das suas medianas.

Problema 5. Seja $n \geq 2$ um inteiro e sejam $a_1, \ldots, a_n$ inteiros positivos fixos (não necessariamente distintos) de maneira que nenhum inteiro maior que 1 divida todos eles. Num quadro estão escritos os números $a_1, \ldots, a_n$ junto com um inteiro positivo x. Um movimento consiste em escolher dois números $a > b$ dos $n+1$ números do quadro e trocá-los por $a-b$ e $2b$. Encontre todos os valores possíveis de x, em função de $a_1, \ldots, a_n$, para os quais é possível obter que, após um número finito de movimentos (possivelmente nenhum), todos os números escritos no quadro sejam iguais.

Problema 6. Determine todos os conjuntos infinitos A de inteiros positivos com a seguinte propriedade: se $a, b \in A$ e $a \geq b$, então $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \in A$.

Nota: $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual que x.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.