# 46ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**Fase Única – Nível 1 (6º ou 7º ano)**

**1.** Uma *potência de* 2 é um número da forma $2^k$ em que $k$ é um inteiro não negativo. Por exemplo, as três menores potências de 2 são $2^0 = 1$, $2^1 = 2$ e $2^2 = 4$. Um número é chamado *especial* quando a soma dos seus algarismos é uma potência de 2. Por exemplo, 2024 é especial, pois $2 + 0 + 2 + 4 = 8 = 2^3$. Dizemos que um número *supera* outro quando o primeiro é maior que o segundo e a soma dos algarismos do primeiro é maior que a soma dos algarismos do segundo. Por exemplo, 2029 supera 2024, pois $2029 > 2024$ e $2 + 0 + 2 + 9 > 2 + 0 + 2 + 4$.

a) Qual é o menor inteiro positivo que é especial e supera 2024?

b) Qual é o menor inteiro positivo que é especial e supera a resposta correta do item anterior?

---

**2.** Nesse problema usaremos algumas peças do jogo de xadrez.

- O *cavalo* (C) é uma peça que ataca quadrados que estão a um movimento em L da sua casa atual. Esse movimento percorre dois quadrados numa direção e um quadrado na direção perpendicular. Uma propriedade importante é que o cavalo consegue pular peças, ou seja, ele pode atacar uma casa mesmo que existam peças no caminho. Veja a primeira figura abaixo em que temos um cavalo no canto inferior esquerdo que ataca 2 quadradinhos (•).
- A *torre* (T) é uma peça que ataca todos os quadradinhos que estão na mesma linha ou na mesma coluna. Diferentemente do cavalo, a torre não pode pular peças. Na segunda figura a seguir, temos uma torre atacando 4 quadradinhos (•).

| | | |
|---|---|---|
| | • | |
| | | • |
| C | | |

| | | |
|---|---|---|
| • | | |
| • | | |
| T | • | • |

Ao colocar algumas peças de xadrez num tabuleiro $3 \times 3$, dizemos que essa configuração é *completa* quando cada um dos 9 quadradinhos está ocupado por exatamente uma peça ou está sendo atacado por pelo menos uma das peças. Não é permitido colocar mais de uma peça em um mesmo quadradinho.

No primeiro exemplo a seguir, temos uma configuração completa com 3 torres. No segundo, uma configuração que não é completa usando 3 torres.

| | | |
|---|---|---|
| T | • | • |
| T | • | • |
| T | • | • |

| | | |
|---|---|---|
| T | • | • |
| T | T | • |
| • | • | |

a) Qual é o número mínimo de cavalos necessários para fazer uma configuração completa em um tabuleiro $3 \times 3$ apenas com cavalos? Lembre-se de mostrar um exemplo com esse número mínimo de cavalos e demonstrar que não existe configuração completa com menos cavalos.

b) Quantas configurações completas diferentes existem em um tabuleiro $3 \times 3$ usando apenas uma torre e dois cavalos? Configurações obtidas com rotações ou reflexões devem ser consideradas diferentes. Por exemplo, as quatro configurações a seguir são consideradas todas distintas.

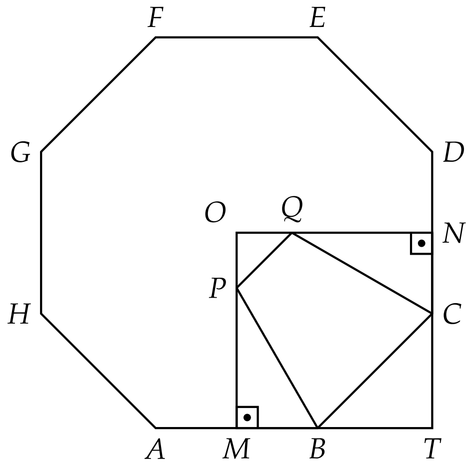
| | | |
|---|---|---|
| | C | |
| T | | |
| | C | |

| | | |
|---|---|---|
| | T | |
| C | | C |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | C | |
| | | T |
| | C | |

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| C | | C |
| | T | |

**3.** Na figura a seguir, $ABCDEFGH$ é um octógono regular de lado 6 cm e centro $O$. Os pontos $M$ e $N$ são os pontos médios de $AB$ e $CD$, respectivamente. O ponto $T$ é a interseção das retas $AB$ e $CD$. Deste modo, $OMTN$ é um quadrado. Além disso, os comprimentos de $BP$ e $CQ$ são iguais a 5 cm. Sabe-se que um octógono regular tem ângulos internos de medida 135° e lados todos de mesma medida.

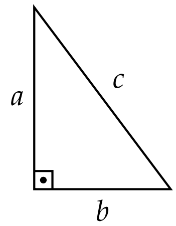



a) Determine a medida do segmento $MP$.

b) Determine o quadrado da medida do segmento $BT$, ou seja, $BT^2$.

c) Determine o quadrado da medida do segmento $PQ$, ou seja, $PQ^2$.

*Nesse problema, você pode querer utilizar o Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo com lados a e b formando ângulo de* 90° *(catetos) e lado c oposto ao ângulo de* 90° *(hipotenusa), vale a relação* $a^2 + b^2 = c^2$.




---

**4.** Considere uma sequência cujo primeiro termo é um inteiro positivo dado $N > 1$. Considere a fatoração de $N$ em primos. Se $N$ é uma potência de 2, a sequência é formada por um único termo: $N$. Caso contrário, o segundo termo da sequência é obtido trocando o maior fator primo $p$ de $N$ por $p + 1$ na fatoração em primos. Se o novo número não é uma potência de 2, repetimos o mesmo procedimento com ele, lembrando de fatorá-lo novamente em primos. Caso contrário, a sequência numérica termina. E assim sucessivamente.

Por exemplo, se o primeiro termo da sequência é $N = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, como o seu maior fator primo é $p = 5$, o segundo termo é $2^2 \cdot 3 \cdot (5 + 1)^2 = 2^4 \cdot 3^3$. Repetindo o procedimento, o maior fator primo do segundo termo é $p = 3$ e então o terceiro termo é $2^4 \cdot (3 + 1)^3 = 2^{10}$. Como obtivemos uma potência de 2, a sequência tem 3 termos: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^3$ e $2^{10}$.

a) Quantos termos tem a sequência cujo primeiro termo é $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$?

b) Mostre que se um fator primo $p$ deixa resto 1 na divisão por 3, então $\frac{p+1}{2}$ é um número inteiro que também deixa resto 1 na divisão por 3.

c) Apresente um termo inicial $N$ menor do que 1.000.000 (um milhão) tal que a sequência iniciada por $N$ tem exatamente 11 termos.

---

**5.** Um campeonato é realizado entre seis times de futebol, em que cada um joga com cada um dos outros exatamente uma vez. Em uma partida de futebol, o vencedor ganha três pontos e o perdedor, zero ponto; caso a partida termine empatada, os dois times ganham um ponto. Sabe-se que, no final do campeonato, os seis times tiveram pontuações diferentes. Qual é o menor valor possível da quantidade de pontos do time que fez mais pontos?

---