46ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Considere uma sequência cujo primeiro termo é um inteiro positivo dado $N > 1$. Considere a fatoração de N em primos. Se N é uma potência de 2, a sequência é formada por um único termo: N. Caso contrário, o segundo termo da sequência é obtido trocando o maior fator primo p de N por $p + 1$ na fatoração em primos. Se o novo número não é uma potência de 2, repetimos o mesmo procedimento com ele, lembrando de fatorá-lo novamente em primos. Caso contrário, a sequência numérica termina. E assim sucessivamente.

Por exemplo, se o primeiro termo da sequência é $N = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, como o seu maior fator primo é $p = 5$, o segundo termo é $2^2 \cdot 3 \cdot (5 + 1)^2 = 2^4 \cdot 3^3$. Repetindo o procedimento, o maior fator primo do segundo termo é $p = 3$ e então o terceiro termo é $2^4 \cdot (3 + 1)^3 = 2^{10}$. Como obtivemos uma potência de 2, a sequência tem 3 termos: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^3$ e 2^{10}.

a) Quantos termos tem a sequência cujo primeiro termo é $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$?

b) Mostre que se um fator primo p deixa resto 1 na divisão por 3, então $\frac{p+1}{2}$ é um número inteiro que também deixa resto 1 na divisão por 3.

c) Apresente um termo inicial N menor do que 1.000.000 (um milhão) tal que a sequência iniciada por N tem exatamente 11 termos.

---

2. Seja ABC um triângulo escaleno. Sejam E e F os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente, e seja D um ponto qualquer no segmento BC. As circunferências circunscritas aos triângulos BDF e CDE intersectam a reta EF em $K \neq F$ e $L \neq E$, respectivamente, e intersectam-se em $X \neq D$. O ponto Y está sobre a reta DX de modo que AY é paralelo a BC. Prove que os pontos K, L, X e Y estão sobre uma mesma circunferência.

---

3. Os números de 1 a 100 são colocados sem repetição em cada casinha de um tabuleiro 10×10. Um *caminho crescente de tamanho* k nesse tabuleiro é uma sequência de casinhas $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tal que, para cada $i = 2, 3, \ldots, k$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- as casinhas c_i e c_{i-1} compartilham um lado ou um vértice;
- o número em c_i é maior que o número em c_{i-1}.

Qual é o maior inteiro positivo k para o qual sempre podemos encontrar um caminho crescente de tamanho k, independentemente de como os números de 1 a 100 estão dispostos no tabuleiro?

46ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA

---

4. Um número é chamado *trilegal* se seus algarismos pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3\}$ e se ele é divisível por 99. Quantos são os números trilegais de 10 algarismos?

---

5. Esmeralda escolhe dois inteiros positivos distintos a e b, com $b > a$, e escreve a equação $x^2 - ax + b = 0$ no quadro. Se a equação possui raízes inteiras positivas distintas c e d, com $d > c$, ela escreve a equação $x^2 - cx + d = 0$ no quadro. Ela repete o procedimento enquanto obtiver raízes inteiras positivas distintas. Caso ela escreva uma equação na qual isso não ocorre, ela para.

a) Mostre que Esmeralda pode escolher a e b de modo que ela vá escrever exatamente 2024 equações no quadro.

b) Qual é a maior quantidade de equações que ela pode escrever sabendo que um dos números escolhidos inicialmente é 2024?

---

6. Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = BC$. Seja D um ponto sobre o segmento AB, E um ponto sobre o segmento BC e P um ponto sobre o segmento DE, tal que $AD = DP$ e $CE = PE$. Seja M o ponto médio de DE. A reta paralela a AB por M intersecta AC em X e a reta paralela a BC por M intersecta AC em Y. As retas DX e EY intersectam-se em F. Prove que FP é perpendicular a DE.