46ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

---

1. Seja a_1 um inteiro maior ou igual a 2. Considere a sequência tal que o seu primeiro termo é a_1 e, sendo a_n o n-ésimo termo da sequência, vale que

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{p_k^{e_k-1}} + 1,$$

em que $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ é a fatoração em primos de a_n, com $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ e $e_1, e_2, \ldots, e_k$ inteiros positivos.
Por exemplo, se $a_1 = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, os próximos dois termos da sequência são

$$a_2 = \frac{a_1}{23^{1-1}} + 1 = \frac{2024}{1} + 1 = 2025 = 3^4 \cdot 5^2;$$

$$a_3 = \frac{a_2}{5^{2-1}} + 1 = \frac{2025}{5} + 1 = 406.$$

Determine para quais valores de a_1 a sequência é eventualmente periódica e quais são todos os possíveis períodos.

Observação: Sendo p um inteiro positivo, uma sequência $x_1, x_2, \ldots$ é *eventualmente periódica com período* p se p é o menor inteiro positivo para o qual existe um $N \geq 0$ satisfazendo $x_{n+p} = x_n$ para todo $n > N$.

---

2. Uma *partição* de um conjunto A é uma família de subconjuntos não vazios de A, de modo que quaisquer dois subconjuntos distintos da família são disjuntos e a união de todos os subconjuntos é igual a A. Dizemos que uma partição de um conjunto de inteiros B é *afastada* se cada subconjunto que compõe a partição **não** contém inteiros consecutivos. Prove que, para todo inteiro positivo n, a quantidade de partições do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é igual a quantidade de partições afastadas do conjunto $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$.

Por exemplo, $\big\{\{1,3\},\{2\}\big\}$ *é uma partição afastada do conjunto* $\{1,2,3\}$. *Por outro lado,* $\big\{\{1,2\},\{3\}\big\}$ *é uma partição do mesmo conjunto, mas que não é afastada pois* $\{1,2\}$ *contém inteiros consecutivos.*

---

3. Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Em um polígono convexo de n lados, todas as bissetrizes internas de seus n ângulos internos são traçadas. Determine, em função de n, o menor número possível de retas distintas determinadas por essas bissetrizes.

46ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

4. Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno. Seja D um ponto no interior do segmento BC tal que D é diferente do pé da altura por A. As retas tangentes por A e B à circunferência circunscrita ao triângulo ABD se encontram em O_1 e as retas tangentes por A e C à circunferência circunscrita ao triângulo ACD se encontram em O_2. Mostre que a circunferência de centro O_1 que passa por A, a circunferência de centro O_2 que passa por A e a reta BC têm um ponto em comum.

---

5. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer reais x e y,

$$f(x^2y - y) = f(x)^2 f(y) + f(x)^2 - 1.$$

---

6. Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Enumere em ordem crescente todas as frações irredutíveis do intervalo $[0, 1]$ que têm denominador positivo e menor ou igual a n:

$$\frac{0}{1} = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \cdots < \frac{p_M}{q_M} = \frac{1}{1}.$$

Determine, em função de n, o menor valor possível de $q_{i-1} + q_i + q_{i+1}$, $0 < i < M$.

Por exemplo, se $n = 4$, a enumeração é

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1},$$

onde $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = 2$, $p_5 = 3$, $p_6 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = 4$, $q_2 = 3$, $q_3 = 2$, $q_4 = 3$, $q_5 = 4$, $q_6 = 1$ e o mínimo procurado é $1 + 4 + 3 = 3 + 2 + 3 = 3 + 4 + 1 = 8$.