46ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Nível U

PRIMEIRO DIA

---

1. Um inteiro positivo n é dito *perfeito* se a soma dos seus divisores positivos $\sigma(n)$ é o dobro de n, ou seja, $\sigma(n) = 2n$. Por exemplo, 6 é um número perfeito, pois a soma de seus divisores positivos é $1 + 2 + 3 + 6 = 12$, que é o dobro de 6. Demonstre que se n é um inteiro positivo perfeito, então:

$$\sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p+1} < \ln 2 < \sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p-1}.$$

---

2. Para cada par de inteiros $j, k \geq 2$, defina a função $f_{jk} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_{jk}(x) = 1 - (1 - x^j)^k$.

(a) Prove que para quaisquer inteiros $j, k \geq 2$, existe um único número real $p_{jk} \in (0, 1)$ tal que $f_{jk}(p_{jk}) = p_{jk}$. Além disso, definindo $\lambda_{jk} := f'_{jk}(p_{jk})$, prove que $\lambda_{jk} > 1$.

(b) Prove que $p_{jk}^j = 1 - p_{kj}$ para quaisquer inteiros $j, k \geq 2$.

(c) Prove que $\lambda_{jk} = \lambda_{kj}$ para quaisquer inteiros $j, k \geq 2$.

---

3. Considere um jogo em um tabuleiro $n \times n$, onde cada casa começa com exatamente uma pedra. Um *movimento* consiste em escolher 5 casas consecutivas na mesma linha ou coluna do tabuleiro e trocar o estado de cada uma dessas casas (tirando a pedra das casas com pedra e colocando uma pedra nas casas sem pedra). Para quais inteiros positivos $n \geq 5$ é possível fazer com que reste exatamente uma pedra no tabuleiro após um número finito de movimentos?

46ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Nível U

SEGUNDO DIA

---

4. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *moralmente ímpar* se o gráfico de f é simétrico em relação a um ponto, isto é, existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que se $(u, v) \in \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ então $(2x_0 - u, 2y_0 - v) \in \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$. Por outro lado, f é dita *moralmente par* se seu gráfico $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ é simétrico em relação a uma reta qualquer (não necessariamente vertical ou horizontal). Se f for moralmente par e moralmente ímpar, então dizemos que f é *parímpar*.

(a) Seja $S \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Prove que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ parímpar tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in S$.

(b) Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que a função polinomial correspondente $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é parímpar.

---

5. Seja A uma matriz 2×2 com entradas inteiras e $\det A \neq 0$. Se a sequência $\operatorname{tr}(A^n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, é limitada, mostre que

$$A^{12} = I \qquad \text{ou} \qquad (A^2 - I)^2 = O.$$

Aqui I e O denotam as matrizes identidade e nula, respectivamente, e tr denota o traço da matriz (soma dos elementos da diagonal principal).

---

6. Para cada inteiro positivo n, enumere em ordem crescente todas as frações irredutíveis do intervalo $[0, 1]$ que têm denominador positivo e menor ou igual a n:

$$\frac{0}{1} = \frac{p_0}{q_0} < \frac{1}{n} = \frac{p_1}{q_1} < \cdots < \frac{1}{1} = \frac{p_{M(n)}}{q_{M(n)}}.$$

Seja k um inteiro positivo. Definimos, para cada n tal que $M(n) \geq k - 1$,

$$f_k(n) = \min \left\{ \sum_{s=0}^{k-1} q_{j+s} \colon 0 \leq j \leq M(n) - k + 1 \right\}.$$

Determine, em função de k, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f_k(n)}{n}$.

Por exemplo, se $n = 4$, a enumeração é

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1},$$

onde $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = 2$, $p_5 = 3$, $p_6 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = 4$, $q_2 = 3$, $q_3 = 2$, $q_4 = 3$, $q_5 = 4$, $q_6 = 1$. Neste caso, temos $f_1(4) = 1$, $f_2(4) = 5$, $f_3(4) = 8$, $f_4(4) = 10$, $f_5(4) = 13$, $f_6(4) = 17$ e $f_7(4) = 18$.