XVI Competição Iberoamericana
Interuniversitária de Matemática
Antigua, Guatemala

Primeiro dia

14 de outubro de 2024

Problema 1. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais. Definimos a sequência de funções reais $(f_n)_{n\geq 0}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale:

$$f_0(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad f_n(x) = \int_{a_n}^{x} f_{n-1}(t)\,dt \quad \text{para } n \geq 1.$$

Determine todas as possíveis sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ tais que $f_n(0) = 0$ para todo $n \geq 2$.
Nota: Não necessariamente $f_1(0) = 0$.

Problema 2. Seja n um inteiro positivo e seja M_n o conjunto das matrizes invertíveis, com entradas inteiras e tamanho $n \times n$.

a) Encontre o maior valor possível de n para o qual existe uma matriz simétrica $A \in M_n$ que satisfaz

$$\det(A^{20} + A^{24}) < 2024.$$

b) Demonstre que para todo n existe uma matriz $B \in M_n$ tal que

$$\det(B^{20} + B^{24}) < 2024.$$

Problema 3. Dado um inteiro positivo n, seja $\phi(n)$ o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são relativamente primos com n. Encontre todos os possíveis inteiros positivos k para os quais existem inteiros positivos $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ tais que:

$$\left\lfloor \frac{\phi(a_1)}{a_1} + \frac{\phi(a_2)}{a_2} + \cdots + \frac{\phi(a_k)}{a_k} \right\rfloor = 2024.$$

Nota: A função $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.

XVI Competição Iberoamericana
Interuniversitária de Matemática
Antigua, Guatemala

Segundo dia

15 de outubro de 2024

Problema 4. Sejam os pontos $O = (0, 0)$ e $A = (2024, -2024)$ no plano. Para n inteiro positivo, Damião desenha todos os pontos de coordenadas inteiras $B_{i,j} = (i, j)$ com $0 \leq i, j \leq n$ e calcula a área de cada triângulo $OAB_{i,j}$. Seja $S(n)$ a soma das $(n + 1)^2$ áreas calculadas anteriormente. Encontre o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n^3}.$$

Problema 5. Um tabuleiro $3\times N$ tem inicialmente todas as suas casas pintadas de branco. Seja $a(N)$ o número máximo de casas que se pode pintar de preto de maneira que não haja três casas consecutivas (na horizontal, vertical ou diagonal) pintadas de preto. Demonstre que $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{a(N)}{N}$ existe e determine seu valor.

Problema 6. Dado um número real x, definimos a série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{n! \cdot x\},$$

onde $\{s\} = s - \lfloor s \rfloor$ é a parte fracionária do número s. Determine se existe algum número irracional x para o qual $S(x)$ converge.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.