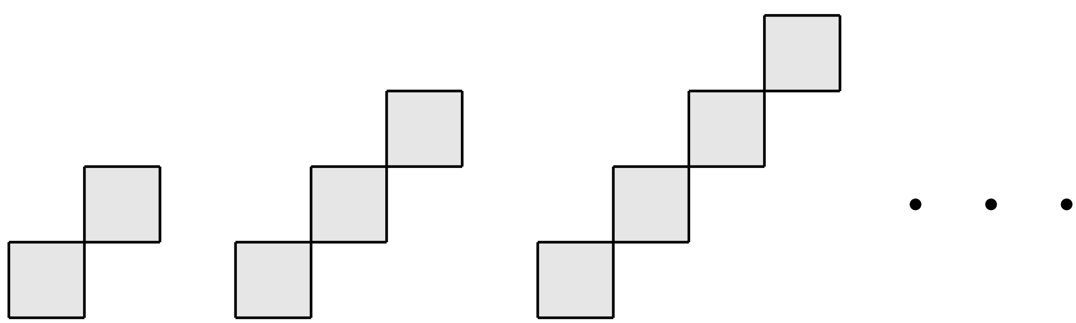
PAGMO 2024
4th Pan-American Girls' Mathematical Olympiad

Durango, Durango, México
26 de novembro de 2024
(Português)

Primeiro dia

Problema 1. Sejam ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$, seja Γ o seu circuncírculo e D o pé da altura de A em BC. Tome o ponto E sobre o segmento BC tal que $CE = BD$. Seja P o ponto de Γ diametralmente oposto ao vértice A. Demonstrar que PE é perpendicular a BC.

Problema 2. Daniela tem um tabuleiro com $m \times n$ casas e quer preenchê-lo com fichas compostas por duas ou mais casas unidas diagonalmente, como exibidas abaixo, sem sobreposição ou deixar casas vazias:



a) Encontrar todos os valores (m, n) para os quais é possível preencher o tabuleiro.
b) Se é possível preencher um tabuleiro com $m \times n$ casas, encontrar a quantidade mínima de fichas que Daniela pode usar para preenchê-lo.
Observação: É permitido rotacionar as fichas.

Problema 3. Seja M um conjunto não vazio de inteiros positivos, e seja S_M a soma de todos os elementos de M. Definimos o *tlacoyo* de M como a soma dos dígitos de S_M. Por exemplo, se $M = \{2, 7, 34\}$, então $S_M = 2 + 7 + 34 = 43$, e o tlacoyo do conjunto M é $4 + 3 = 7$.

Demonstrar que para todo inteiro positivo n, existe um conjunto M de n inteiros positivos distintos, tal que todos os seus subconjuntos não vazios têm o mesmo tlacoyo.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

Durango, Durango, México
27 de noviembre de 2024
(Português)

Segundo dia

Problema 4. O n-*fatorial* de um inteiro positivo x é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a x que são congruentes a x módulo n.

Por exemplo, para o número 16, seu 2-fatorial é $16 \times 14 \times 12 \times 10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2$, seu 3-fatorial é $16 \times 13 \times 10 \times 7 \times 4 \times 1$ e seu 18-fatorial é 16.

Um inteiro positivo é *olímpico* se tem n dígitos, todos diferentes de zero, e se é igual a soma dos n-fatoriais dos seus dígitos. Encontrar todos os inteiros positivos olímpicos.

Problema 5. Encontrar todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x+y) - f(x)) + f(x)f(y) = f(x^2) - f(x+y),$$

para todos os números reais x, y.

Problema 6. Seja ABC um triângulo e sejam a, b e c os tamanhos dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Seja R o raio do seu circuncírculo e r o raio do seu incírculo. Suponhamos que $b + c = 2a$ e $R = 3r$.

O exincírculo relativo ao vértice A corta o circuncírculo de ABC nos pontos P e Q. Seja U o ponto médio do lado BC e seja I o incentro de ABC.

Demonstrar que U é o baricentro do triângulo QIP.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.