Álgebra Espelhada: O Poder dos Polinômios Simétricos na Resolução de Problemas Olímpicos

Carlos Augusto D. Ribeiro

Salvador, Janeiro de 2025

Introdução

Os polinômios simétricos são ferramentas poderosas na matemática, especialmente quando se trata de resolver problemas olímpicos. Eles aparecem naturalmente em diversas áreas, como álgebra, teoria dos números, combinatória e até mesmo em desigualdades. Mas o que os torna tão especiais? A resposta está na sua capacidade de explorar a simetria inerente em muitos problemas matemáticos, permitindo-nos simplificar e resolver questões que, à primeira vista, parecem complexas.

Neste artigo, exploraremos os conceitos básicos dos polinômios simétricos, suas propriedades e como eles podem ser utilizados para resolver problemas olímpicos de forma elegante e eficiente!

Polinômios Simétricos

Dado um conjunto de variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, um polinômio simétrico $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dita **simétrico** se ele permanece inalterado sob qualquer permutação das variáveis. Em outras palavras, para qualquer reordenação $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, onde σ é uma permutação, temos:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Informalmente, isso significa que todas as variáveis desempenham o mesmo papel no polinômio, e substituir uma variável por outra não altera o polinômio.

Um exemplo simples de polinômio simétrico é $P(x, y) = x + y$. Outro exemplo, um pouco mais complexo, em três variáveis é $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$.

Um conjunto de polinômios simétricos particularmente útil são os **polinômios simétricos elementares**. Para n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, os polinômios simétricos elementares são definidos como:

- $S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ (soma das variáveis),
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$ (soma dos produtos dois a dois),
- $S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$ (soma dos produtos três a três),
- $\vdots$
- $S_n = x_1x_2 \ldots x_n$ (produto de todas as variáveis).

Esses polinômios são chamados de "elementares" porque surgem naturalmente na expansão de polinômios e desempenham um papel essencial na compreensão das relações entre raízes e coeficientes (lembra das relações de Girard?!). Para ilustrar essa importância, observe que uma simples manipulação algébrica revela que eles correspondem aos coeficientes da *equação geral* de grau n.

$$\begin{aligned} F(x, t_1, \ldots, t_n) &= (x - t_1)(x - t_2)\cdots(x - t_n) \\ &= x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots + (-1)^j S_j x^{n-j} \\ &\quad + \cdots + (-1)^n S_n. \end{aligned}$$

Um fato não tão conhecido (dos olímpicos) é que existe um teorema fundamental para os polinômios simétricos, cujo enunciado está logo a seguir.

Teorema. *(Fundamental dos Polinômios Simétricos) Todo polinômio simétrico $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pode ser reescrito em termos dos polinômios simétricos elementares $S_1, S_2, \ldots, S_n$.*

A título de exemplo, o polinômio simétrico $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)\big((x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad - (xy + yz + zx)\big) \\ &= S_1(S_1^2 - 2S_2) - 3S_3. \end{aligned}$$

O Teorema do Fator e Aplicações

O Teorema do Fator afirma que, se $P(x)$ é um polinômio com coeficientes reais (ou complexos), então *a* é raiz de $P(x)$ se, e somente se, $x - a$ é um fator de $P(x)$. Este resultado estabelece uma conexão entre a fatoração e a resolução de equações polinomiais. Para ilustrar o uso deste teorema, consideremos alguns exemplos representativos.

Exemplo 1. Fatorar $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3)$.
Solução. Seja $P(a,b,c)$ a expressão a ser fatorada. Observe que $P(a,-a,c) = c^3 - c^3 = 0$. Pelo Teorema do Fator, $a+b$ é um fator de P. Por simetria, $b+c$ e $c+a$ também são fatores. Logo, existe uma constante K tal que

$$P(a,b,c) = K(a+b)(b+c)(c+a)$$

para todos a, b, c. Para determinar K, fazemos $a = b = c = 1$. Isto resulta em $3^3 - 3 = 8K$, donde $K = 3$. Portanto,

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

Exemplo 2. Fatorar completamente $a^3+b^3+c^3-3abc$.
Solução. Se $a+b+c=0$, então

$$a^3+b^3+c^3-3abc = -(b+c)^3+b^3+c^3+3(b+c)bc = 0.$$

Assim, $a+b+c$ é um fator. Note que a expressão permanece inalterada se substituirmos b por ωb e c por $\omega^2 c$, onde $\omega = (-1+i\sqrt{3})/2$, uma raiz cúbica primitiva da unidade. Portanto, $a+\omega b+\omega^2 c$ também é um fator. Pelo mesmo argumento, $a+\omega^2 b+\omega c$ é fator, e a fatoração completa é

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$$

Exemplo 3. (USAMO 1976) Sejam $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$ polinômios tais que

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4+x^3+x^2+x+1)S(x).$$

Prove que $x-1$ é um fator de $P(x)$.

Solução. O lado direito se anula para qualquer raiz quinta da unidade. Seja $\alpha = e^{2\pi i/5}$. Substituindo $x = \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ e usando $\alpha^5 = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
P(1) + \alpha Q(1) + \alpha^2 R(1) &= 0\\
P(1) + \alpha^2 Q(1) + \alpha^4 R(1) &= 0\\
P(1) + \alpha^3 Q(1) + \alpha R(1) &= 0\\
P(1) + \alpha^4 Q(1) + \alpha^3 R(1) &= 0
\end{aligned}$$

Somando estas equações e usando $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = 0$, obtemos $4P(1) - Q(1) - R(1) = 0$. Multiplicando as equações por $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, respectivamente, e somando, encontramos $-P(1) - Q(1) - R(1) = 0$. Portanto, $4P(1) = Q(1) + R(1) = -P(1)$, o que implica $P(1) = 0$. Logo, $x-1$ é um fator de $P(x)$.

Somas de Potências de Newton

As somas de potências de Newton são ferramentas que relacionam raízes de polinômios. Dadas as raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um polinômio, definimos $P_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ e as funções simétricas elementares $S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots$, e assim por diante. A relação entre estas quantidades é dada pela fórmula recursiva:

$$P_k = S_1P_{k-1} - S_2P_{k-2} + S_3P_{k-3} - \cdots + (-1)^{n-1}S_nP_{k-n},$$

válida para todo $k \ge 1$, onde consideramos $P_0 = n$.

Para ilustrar uma aplicação desta teoria, consideremos o seguinte problema: sejam x, y e z números reais que satisfazem as relações:

$$\begin{aligned}
x+y+z &= 1\\
x^2+y^2+z^2 &= 2\\
x^3+y^3+z^3 &= 3
\end{aligned}$$

Nosso objetivo é determinar o valor de $x^5+y^5+z^5$.

Para resolver este problema, vamos aplicar sistematicamente as relações entre as somas de potências e as funções simétricas elementares. Das equações dadas, identificamos imediatamente que $S_1 = 1$ e $P_2 = 2$. O valor de S_2 pode ser obtido da relação $S_2 = \frac{S_1^2 - P_2}{2}$, resultando em:

$$S_2 = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Para encontrar S_3, utilizamos a equação $P_3 = S_1P_2 - S_2P_1 + 3S_3$:

$$\begin{aligned}
3 &= 1\cdot 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + 3S_3\\
3 &= 2 + \frac{1}{2} + 3S_3\\
S_3 &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Com estes valores, podemos calcular P_4:

$$\begin{aligned}P_4 &= S_1P_3 - S_2P_2 + S_3P_1\\ &= 1\cdot 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 1\\ &= 3+1+\frac{1}{6}\\ &= \frac{25}{6}\end{aligned}$$

E finalmente, P_5:

$$\begin{aligned}P_5 &= S_1P_4 - S_2P_3 + S_3P_2\\ &= 1\cdot\frac{25}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 2\\ &= \frac{25}{6}+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\\ &= \frac{25+9+2}{6} = 6\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $x^5+y^5+z^5=6$.

Problemas

Problema 1. (OBM 2010) Sejam a, b e c reais tais que $a \neq b$ e

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2010.$$

Calcule $c^2(a+b)$.

Problema 2. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=6,\\ xy+xz+yz=11,\\ xyz=6.\end{cases}$$

Problema 3. (INMO 1991) Quantos trios ordenados (x, y, z) de números reais satisfazem o sistema de equações

$$x^2+y^2+z^2=9,$$
$$x^4+y^4+z^4=33,$$
$$xyz=-4?$$

Problema 4. Um polinômio antissimétrico $f(x, y)$ é aquele que satisfaz

$$f(x,y) = -f(y,x).$$

Mostre que qualquer polinômio antissimétrico pode ser escrito como

$$f(x,y) = (x-y)g(x,y),$$

onde g é simétrico.

Problema 5. (AIME 2003) Considere os polinômios

$$P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$$

e

$$Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1.$$

Sabendo que z_1, z_2, z_3 e z_4 são as raízes de $Q(x) = 0$, determine

$$P(z_1)+P(z_2)+P(z_3)+P(z_4).$$

Problema 6. Determine x que satisfaz

$$\sqrt[3]{10-x}+\sqrt[3]{x} = 1.$$

Problema 7. (AIME 1983) Suponha que a soma dos quadrados de dois números complexos x e y seja 7 e a soma dos cubos seja 10. Qual é o maior valor real que $x+y$ pode assumir?

Problema 8. (PRMO 2019) Seja

$$f(x) = x^2+ax+b.$$

Se, para todo x real não nulo, vale a relação

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right),$$

e as raízes de $f(x)=0$ são inteiros, qual é o valor de a^2+b^2?

Problema 9. (IMO 2004) Determine todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais que satisfazem a igualdade

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

para todos os trios (a, b, c) de números reais tais que $ab+bc+ca=0$.

Problema 10. (AIME 1984) Determine $w^2+x^2+y^2+z^2$ se

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2^2-1}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2} &= 1,\\ \frac{x^2}{4^2-1}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2} &= 1,\\ \frac{x^2}{6^2-1}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2} &= 1,\\ \frac{x^2}{8^2-1}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2} &= 1.\end{aligned}$$

Problema 11. Determine k tal que

$$x^5+y^5+z^5+k(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$$

tem $x+y+z$ como fator.

Problema 12. (AIME 1988) Encontre a se a e b são inteiros tais que $x^2 - x - 1$ é um fator de

$$ax^{17} + bx^{16} + 1.$$

Problema 13. (USAMO 1977) Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que

$$1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn}$$

é divisível por

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^m.$$

Problema 14. Fatore

$$a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3.$$

Problema 15. Fatore

$$(a+b)^7 - a^7 - b^7.$$

Problema 16. Fatore

$$8(a+b+c)^3 - (a+b)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3.$$

Bibliografia

[1] IMOmath. Polynomials problems. Disponível em `https://imomath.com/index.cgi?page=polynomialsProblems`. Acesso em: 29 jan. 2024.

[2] Brilliant.org. Symmetric polynomials - Definition. Disponível em `https://brilliant.org/wiki/symmetric-polynomials-definition/`. Acesso em: 29 jan. 2024.

[3] LOZANSKY, Edward; ROUSSEAU, Cecil. *Winning Solutions*. Problem Books in Mathematics. Springer, 1996.

[4] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Volume 6, Polinômios*. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 2015.

[5] STANLEY, Richard P.; FOMIN, Sergey P. *Enumerative Combinatorics: Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.

[6] Wikipedia contributors. Newton's identities. Disponível em `https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_identities`. Acesso em: 29 jan. 2024.

[7] Wikipedia contributors. Symmetric polynomial. Disponível em `https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_polynomial`. Acesso em: 29 jan. 2024.