Teoria dos Grafos

Semana Olímpica 2025 - Salvador - BA

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

1 Definições Básicas

Definição 1.1. Um grafo G é uma estrutura composta por dois conjuntos: um conjunto $V(G)$, cujos elementos são chamados *vértices*, e um conjunto $E(G)$, composto por pares não ordenados de vértices e cujos elementos são chamados *arestas*. Escrevemos $v(G)$ para denotar a quantidade de vértices de um grafo G e $e(G)$ para denotar a quantidade de arestas em G.

Definição 1.2. O grau de um vértice $v \in V(G)$ é o número de arestas que contém v. Denotamos o grau de um vértice v por $d_G(v)$, o grau mínimo de G por $\delta(G)$ e o grau máximo de G por $\Delta(G)$.

Definição 1.3. Um caminho de comprimento k em um grafo G é uma ordenação $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ de vértices $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$ tal que $v_{i-1}v_i \in E(G)$, para $1 \leq i \leq n$.

Definição 1.4. Um ciclo de comprimento k em um grafo G é um grafo obtido a partir de um caminho $(v_1, \dots, v_k)$ adicionando-se a aresta v_1v_k. O comprimento do menor ciclo é chamado a *cintura* do grafo G e denotamos por $g(G)$.

Definição 1.5. Um n-*clique*, também denotado por K_n, é um grafo com n vértices que é completo, ou seja, com todas as suas arestas traçadas. O *número de clique* de um grafo, denotado por $\omega(G)$ é o tamanho do maior clique contido em G.

Teorema 1.6. Em todo grafo vale
$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G).$$
Em particular, a quantidade de vértices de grau ímpar é par.

Teorema 1.7. Todo grafo com pelo menos uma aresta contém um subgrafo H com $\delta(G) > \dfrac{e(G)}{v(G)}$.

Teorema 1.8. Seja G um grafo em que todo vértice tem grau pelo menos $\delta(G) \geq 2$. Então G contém um ciclo de tamanho pelo menos $\delta(G) + 1$.

1.1 Problemas

Problema 1. Seja G um grafo conexo com n vértices e P um caminho em G de tamanho k, suponha que G não contém um caminho de tamanho maior do que k. Seja $Y = V(G) \setminus V(P)$ e seja $v \in Y$ um vértice adjacente a s vértices de P com $s \geq 1$, e suponha que o maior caminho usando apenas os vértices de Y e começando em v tem comprimento p. Prove que $s + p \leq k/2$.

Problema 2. (Treinamento Cone Sul 2006) Mostre que em uma festa com um número par de pessoas existem duas que possuem um número par de amigos em comum.

Problema 3. (Bulgária 2023) Seja G um grafo com $n \geq 6$ vértices em que todos os vértices tem grau pelo menos 3. Se $C_1, C_2, \ldots, C_k$ são todos os ciclos em G, determine todos os possíveis valores do mdc entre $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$, em que $|C|$ denota a quantidade de vértices do ciclo C.

Problema 4. (Treinamento Cone Sul 2017) Em uma festa, há $2n+1$ pessoas. Sabe-se que para qualquer grupo X de n pessoas, existe uma pessoa (que não está em X) que conhece todas as pessoas de X. Prove que existe uma pessoa que conhece todas as outras da festa.

Problema 5. (Treinamento Cone Sul 2013) Existem $n \geq 5$ pessoas em uma festa. Suponha que entre quaisquer três pessoas na festa existem pelo menos duas que se conhecem. Mostre que podemos selecionar pelo menos $n/2$ pessoas e arranjá-los em torno de uma mesa circular de modo que cada pessoa fique sentada entre dois de seus amigos.

Problema 6. (Treinamento Cone Sul 2010) Existem 1988 cidades e 4000 estradas em um certo país (cada estrada conecta duas cidades). Prove que existe um caminho fechado passando através de não mais do que 20 cidades.

Problema 7. (OBM) Há n cidades na Conesulândia. Cada duas cidades desse país são ligadas por uma rodovia ou uma ferrovia, não existindo nenhum par de cidades ligadas por ambos os meios. Um turista deseja viajar por toda a Conesulândia, visitando cada cidade exatamente uma vez, e retornar à cidade onde ele começou sua jornada. Prove que é possível escolher a ordem na qual as cidades serão visitadas de modo que o turista mude o meio de transporte no máximo uma vez.

Problema 8. (Treinamento Cone Sul 2018) Em um país, há 2018 cidades e 4033 estradas, onde cada estrada interliga duas cidades distintas. Sabe-se ainda que para cada par de cidades, há no máximo uma estrada interligando este par. Prove que existe um inteiro $4 \leq n \leq 2018$ e cidades $C_1, C_2, \ldots, C_n$ duas a duas distintas, tais que as seguintes propriedades são válidas simultaneamente:

- C_i está interligada a C_{i+1} para todo $1 \leq i \leq n-1$;
- C_1 está interligada a C_n;
- Existem j e k com $1 \leq j < k \leq n$ tais que $k - j \neq 1$, $k - j \neq n - 1$ e C_j está interligada a C_k.

Problema 9. Todos os vértices de um grafo começam com a cor branca. A seguinte operação é permitida: escolher um vértice e trocar a sua cor e a de todos os seus vizinhos. Prove que, não importa qual seja o grafo, é sempre possível, a partir de uma quantidade finita de operações, deixar todos os vértices do grafo pretos.

Problema 10. (IMO SL 2001) Defina um k-clique como um conjunto de k pessoas tais que qualquer par delas se conhecem. Em uma festa, sabe-se que quaisquer pares de 3-cliques possui pelo menos uma pessoa em comum e que não existem 5-cliques. Prove que existem duas pessoas ou menos na festa de modo que se elas forem embora então não existirão mais 3-cliques na festa.

2 Árvores e Conexidade

Definição 2.9. Um grafo é conexo se, e somente se, para todo todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe um caminho entre u e v. Uma *componente conexa* é um subgrafo conexo de G aresta maximal, ou seja, tal que não é possível adicionar outras arestas a ele.

Definição 2.10. Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos. A união de árvores disjuntas é chamada *floresta*.

Teorema 2.11. Seja G um grafo com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:

- G é uma árvore;
- G é conexo e $e(G) = n - 1$;
- G é acíclico e $e(G) = n - 1$;
- Entre quaisquer dois vértices de G existe exatamente um caminho.

Teorema 2.12. Toda árvore possui pelo menos duas folhas.

Teorema 2.13. Se um grafo possui k componentes conexas, então $e(G) \geq v(G) - k$.

2.1 Problemas

Problema 11. Prove que, em qualquer grafo conexo, é possível retirar um vértice com todas as suas arestas de modo que o grafo resultante continue conexo.

Problema 12. (USAMO 1989) Os 20 participantes de um torneio local de tênis marcaram 14 jogos entre eles, com cada participantes jogando pelo menos um jogo. Prove que existe um conjunto de 6 jogos com 12 participantes distintos.

Problema 13. (IMO 2020) Seja $n > 1$ um inteiro. Na encosta de uma montanha existem n^2 estações, todas com diferentes altitudes. Duas companhias de teleféricos, A e B, operam k teleféricos cada uma. Cada teleférico faz a viagem de uma estação para uma de maior altitude (sem paragens intermédias). Os k teleféricos de A partem de k estações diferentes e terminam em k estações diferentes; além disso, se um teleférico parte de uma estação de maior altitude do que a de partida de outro, também termina numa estação de maior altitude do que a de chegada desse outro. A companhia B satisfaz as mesmas condições. Dizemos que duas estações estão ligadas por uma companhia se podemos começar na estação com menor altitude e chegar à de maior altitude usando um ou mais teleféricos dessa companhia (não são permitidos quaisquer outros movimentos entre estações). Determine o menor inteiro positivo k que garante que existam duas estações ligadas por ambas as companhias.

Problema 14. (Treinamento Cone Sul 2009) Existem 1000 cidades em Shinelândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Shinelândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

Problema 15. (IMC 2015) Sejam $n \geq 2$ um inteiro positivo, $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ pontos no espaço euclidiano de dimensão n, nem todos no mesmo hiperplano, e B um ponto estritamente no interior do fecho convexo de $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Prove que $\angle A_i B A_j > 90°$ ocorre para pelo menos n pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n+1$.

Problema 16. Seja $k \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Mostre que se G é um grafo com $\delta(G) \geq k$, então $T \subset G$.

3 Conjuntos Independentes

Definição 3.14. Um conjunto independente é um subconjunto de $V(G)$ tal que não exista aresta com extremidades em $V(G)$. O *número de independência* $\alpha(G)$ de um grafo é o tamanho do maior conjunto independente.

Teorema 3.15. (Caro-Wei) Para todo grafo G temos

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1+d(v)}.$$

3.1 Problemas

Problema 17. Mostre o teorema de Mantel considerando o maior conjunto independente e utilize a desigualdade de Caro-Wei para mostrar o teorema de Turán.

Problema 18. (IMO SL 2012) São dados 2^{500} pontos no círculo numerados com $1, 2, \ldots, 2^{500}$ em alguma ordem. Prove que podemos escolher 100 cordas duas a duas disjuntas ligando alguns desses pontos de modo que as 100 somas dos pares de números nos extremos de cada corda são iguais.

Problema 19. (Romênia TST 2022) Seja $k \geq 2$ um inteiro. Determine o menor inteiro positivo n tal que, entre quaisquer n pontos no plano, existem k deles tais que todas as distâncias entre esses pontos são menores ou iguais a 2, ou todas as distâncias são estritamente maiores que 1.

Problema 20. (Rússia 2013) Há 2013 cartas na mesa, cada uma com um número distinto escrito. As cartas estão com a face com o número virada para baixo. Um movimento consiste em apontar 10 cartas e receber um dos números nessas 10 cartas (não se sabe a posição dele entre as 10 cartas). Qual é o maior número de cartas que conseguimos descobrir o número?

4 Colorações

Definição 4.16. O *número cromático* $\chi(G)$ de um grafo é a menor quantidade de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de modo que não haja uma aresta com extremidades de mesma cor. Também podemos colorir arestas, de modo que arestas que têm um vértice em comum tenham cores diferentes. O número mínimo de cores tal que existe uma coloração satisfazendo isso é chamado de *número cromático de aresta* de G e é denotado por $\chi'(G)$.

Teorema 4.17. Para todo grafo G, vale $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.

Teorema 4.18. Para todo grafo G, vale $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Teorema 4.19. (Brooks) Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Teorema 4.20. (Vizing) Para todo grafo G temos $\chi'(G) \in \{\Delta, \Delta + 1\}$.

4.1 Problemas

Problema 21. Mostre que para todo grafo G, vale $e(G) \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

Problema 22. A *degenerância* de um grafo é definida como $d = \max_{H \subset G} \delta(H)$. Mostre que $\chi(G) \leq d+1$.

Problema 23. Seja G^c o complementar de G. Então $\chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1$.

Problema 24. Seja G^c o complementar de G. Então $\chi(G) + \chi(G^c) \geq 2\sqrt{n}$.

Problema 25. Determine o número cromático de aresta do grafo completo K_n.

Problema 26. (IMO SL 2013) Um físico maluco descobriu um novo tipo de partícula chamada *imon*, depois que algumas delas apareceram misteriosamente em seu laboratório. Alguns pares de imons no laboratório podem interagir, e cada imon pode fazer quantas interações ele quiser. O físico descobriu como realizar dois tipos de operações com estas partículas, uma de cada vez:

(i) Se algum imon está interagindo com um número ímpar dos outros imons no laboratório, então o físico pode destruí-lo;

(ii) A qualquer momento, ele pode dobrar a família de imons no laboratório, criando uma cópia I' de cada imon I. Durante este procedimento, duas cópias I' e J' passam a interagir se, e somente se, as cópias originais I e J estão interagindo, e cada cópia I' passa a interagir com o seu original I, de modo que nenhuma outra interação ocorre ou desaparece nesse momento.

Prove que o físico pode aplicar uma sequência de tais operações de modo a obter uma família de imons de modo que nenhum par deles esteja interagindo.

5 Grafos Bipartidos

Definição 5.21. Um grafo é *bipartido* se podemos particionar $V(G) = X \cup Y$ de modo que X e Y são conjuntos independentes. Denotamos por $K_{s,t}$ o grafo bipartido completo com partes de tamanho s e t.

Teorema 5.22. Se G é bipartido se, e somente se, G não tem ciclos ímpares.

Teorema 5.23. Todo grafo G possui um subgrafo bipartido H tal que $e(H) \geq \dfrac{e(G)}{2}$.

5.1 Problemas

Problema 27. (Bulgária 2004) Considere um grupo de n pessoas tal que, para quaisquer 3 delas, existem 2 que não se conhecem. Ademais, para qualquer partição das pessoas em dois grupos, algum dos grupos contém um par de pessoas que se conhecem. Prove que existe alguém que conhece no máximo $2n/5$ pessoas.

Problema 28. (IMO SL 2004) A seguinte operação é permitida em um grafo finito: escolher um ciclo qualquer de tamanho 4 (se existir algum), escolher uma de suas arestas, e deletá-la do grafo. Para cada $n \geq 4$ inteiro positivo fixado, determine a menor quantidade de arestas de um grafo que pode ser obtido por meio de aplicações sucessivas de tal operação a partir de um grafo completo com n vértices.

Problema 29. Mostre que para todo grafo bipartido G temos $\chi'(G) = \Delta$.

Problema 30. (Ibero 2016) Determine a maior quantidade de bispos que podem ser colocados num tabuleiro de xadrez 8×8 tal que não existam dois bispos na mesma casa e cada bispo seja ameaçado por no máximo um dos outros bispos.

6 Emparelhamentos

Definição 6.24. Um *emparelhamento* em um grafo G é um subconjunto de arestas duas a duas disjuntas. Um emparelhamento M é dito *perfeito* se satura $V(G)$, ou seja, se todo vértice em $V(G)$ é extremo de alguma aresta de M.

Teorema 6.25. (Hall) Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Denotamos por $N_G(S)$ a vizinhança comum dos vértices de um conjunto $S \subseteq V(G)$. O grafo G contém um emparelhamento que satura X se, e somente se,

$$|N_G(S)| \geq |S|$$

para todo $S \subseteq X$.

Teorema 6.26. (Tutte) Um grafo G possui um emparelhamento perfeito se, e somente se, para todo $U \subset V(G)$, $G \setminus U$ possui no máximo $|U|$ componentes conexas com quantidade ímpar de vértices.

6.1 Problemas

Problema 31. (OBMU 2020) Seja n um inteiro positivo. Numa nave espacial estão $2n$ pessoas, e quaisquer duas delas são amigas ou inimigas (a amizade/inimizade é simétrica). Dois alienígenas fazem a seguinte brincadeira: alternadamente, cada jogador escolhe uma pessoa por vez, de modo que a pessoa escolhida a cada turno seja amiga da pessoa escolhida pelo adversário no turno anterior (no primeiro turno, o primeiro jogador pode escolher qualquer pessoa). Quem não puder mais jogar, perde (uma pessoa só pode ser escolhida uma vez). Prove que o segundo jogador possui estratégia vencedora se, e somente se, as $2n$ pessoas podem ser divididas em n pares, de modo que quaisquer duas pessoas num mesmo par sejam amigas.

Problema 32. Sejam a, n inteiros positivos com $a \geq (n-1)!$. Prove que existem n primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tais que $p_i \mid a + i$, para $1 \leq i \leq n$.

Problema 33. (Vietnã TST 2012) Um grupo de 42 estudantes participa de uma competição. Sabe-se que cada estudante é amigo de exatamente 20 outros estudantes. Mostre que é possível dividir os estudantes em dois grupos ou em 21 grupos, de tal modo que o número de estudantes em cada grupo é igual e dois estudantes quaisquer em cada grupo são amigos.

Problema 34. (APMO 2003) Dados dois inteiros positivos m e n, determino o menor inteiro positivo k tal que entre quaisquer k pessoas, existem $2m$ delas que formam m pares de pessoas que se conhecem ou $2n$ delas formam n pares de pessoas que se conhecem.

Problema 35. (Bulgária) Em um tabuleiro $n \times n$ com entradas 0 ou 1 sabe-se que se tomarmos n quadradinhos sem dois na mesma linha e nem dois na mesma coluna existe pelo menos um quadradinho com entrada 1. Prove que existem i linhas e j colunas com $i + j \geq n + 1$, tais que as interseções entre essas linhas e essas colunas contém apenas 1.

Problema 36. (IMO SL 2006) Um *triângulo esburacado* é um triângulo equilátero virado para cima de lado n, dividido em n^2 triângulos equiláteros unitários, com n triângulos equiláteros unitários virados para cima cortados. Um *diamante* é um losango com lado unitário e ângulos internos $60°$ e $120°$. Prove que um triângulo equilátero esburacado T pode ser coberto por diamantes (sem sobreposições) se, e somente se, todo triângulo equilátero de lado k virado para cima e contido em T tem no máximo k buracos, $1 \leq k \leq n$.

7 Grafos Hamiltonianos e Grafos Eulerianos

Definição 7.27. Um *ciclo hamiltoniano* é um ciclo em um grafo G é um clico que passa por todos os vértices de G. Dizemos que G é *hamiltoniano* se G possui um ciclo hamiltoniano.

Definição 7.28. Uma trilha em um grafo é uma sequência de vértices $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $1 \leq i \leq k$ e todas as arestas são distintas, mas pode haver repetição de vértices. Uma *trilha euleriana* é uma trilha que passa por todas as arestas de G. Um grafo G é dito euleriano se ele possui uma trilha euleriana fechada, ou seja, que começa e termina no mesmo vértice.

Teorema 7.29. (Dirac) Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices. Se $\delta(G) \geq n/2$, então G é hamiltoniano.

Teorema 7.30. (Ore) Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices. Se para todo par de vértices não adjacentes vale $d(u) + d(v) \geq n$, então G é hamiltoniano.

Teorema 7.31. (Euler) Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, todos os vértices de G têm grau par. Se o grafo possui exatamente 2 vértices de grau ímpar, então ele possui uma trilha euleriana.

7.1 Problemas

Problema 37. Em um tabuleiro 8×8 determine todos os dominós 2×1 para os quais as 62 casas restantes podem ser cobertas com dominós 2×1.

Problema 38. (IMO 1991) Seja G um grafo conexo com m arestas. Prove que as arestas podem ser numeradas com os inteiros positivos $1, 2, \ldots, m$ de forma que para cada vértice de grau pelo menos 2, o máximo divisor comum dos rótulos de todas as arestas incidentes a esse vértice é 1.

Problema 39. (IMO 2020) Temos $4n$ pedras com pesos $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Cada pedra está colorida com uma de n cores e há quatro pedras de cada cor. Mostre que podemos organizar as pedras em dois grupos de modo que os pesos totais dos dois grupos são iguais e Cada grupo contém duas pedras de cada cor.

Problema 40. (SL IMO 2023) Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo. Esmeralda possui uma faixa retangular $1 \times n^2$ consistindo de n^2 quadrados unitários, em que no i-ésimo quadrado está escrito o número i, para $1 \leq i \leq n^2$. Ela deseja cortar a faixa em diversas peças, cada peça formada por quadrados unitários consecutivos, e então *transladar* (sem rotacionar ou virar) as peças de modo a obter um quadrado $n \times n$ satisfazendo a seguinte propriedade: se no quadrado unitário na linha i e coluna j está escrito o número a_{ij}, então $a_{ij} - (i + j - 1)$ é divisível por n. Determine o número mínimo de peças que Esmeralda precisa para realizar seu objetivo.

8 Grafos Planares

Definição 8.32. Um grafo é *planar* se pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem.

Teorema 8.33. (Fórmula de Euler) Em um grafo planar conexo temos $v(G) - e(G) + f(G) = 2$, em que $f(G)$ é a quantidade de *faces* de G, ou seja, a quantidade de regiões em que o plano fica dividido.

Teorema 8.34. Em um grafo planar temos $2e(G) \geq 3f(G)$ e $e(G) \leq 3n - 6$.

8.1 Problemas

Problema 41. (OBM 2004) Determine todos os n para os quais é possível dividir um triângulo em n triângulos menores de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice incida o mesmo número de segmentos.

Problema 42. (Teorema das 5 cores) O número cromático de um grafo é a quantidade mínima de cores necessárias para pintas os vértices de um grafo de modo que quaisquer dois vértices adjacentes estejam coloridos com cores distintas. Mostre que o número cromático de qualquer grafo planar é no máximo 5.

9 Grafos Orientados

Definição 9.35. Um grafo orientado é um grafo (G, E) em quase arestas possuem uma orientação, normalmente representada por uma flecha na direção de um dos extremos. Em outras palavras, os elementos de E são pares ordenados de vértices e não mais conjuntos de tamanho 2.

Definição 9.36. Um torneio é um grafo completo orientado. Dizemos que um torneio é *transitivo* se não possui ciclos dirigidos.

Teorema 9.37. Sejam $d_{in}(v)$ a quantidade de arestas entrando em v e $d_{out}(v)$ a quantidade de arestas saindo de v. Então

$$\sum_{v \in V(G)} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(G)} d_{out}(v).$$

Teorema 9.38. Se $d_{out}(v) \geq 1$ para todo $v \in V(G)$, então G possui um ciclo dirigido.

Teorema 9.39. Todo torneio T possui um caminho hamiltoniano.

Teorema 9.40. Todo torneio possui um vértice v tal que $V(T) = v \cup N_{out}(v) \cup N_{out}(N_{out}(v))$.

Teorema 9.41. Se T é transitivo, então para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ existe v tal que $d_{out}(v) = n - k$.

9.1 Problemas

Problema 43. (Treinamento Cone Sul 2005) Um torneio de futebol consiste de n times. Sabemos que cada time jogou exatamente uma vez com cada outro, e que para quaisquer dois times A e B, existem exatamente t times que perderam de A e B. Mostre que $n = 4t + 3$.

Problema 44. Há 100 cidades no reino de Olímpia e cada par delas é conectada por uma rodovia de mão única. Foi descoberto que a propriedade de conexidade é falha. Prove que o rei pode acabar com este problema se ele escolher uma das cidades e trocar as direções de todas as estradas que chegam ou partem dessa cidade.

Problema 45. (Treinamento Cone Sul 2017) Os Estados Unidos do Cone Sul possuem 2017 estados. A OBM linhas aéreas quer estabelecer alguns voos, apenas de ida, entre pares de estados, de tal modo que cada estado possua exatamente um voo saindo dele. Determine o menor inteiro positivo k para o qual, não importando como a OBM linhas aéreas estabeleça seus voos, os estados podem sempre ser particionados em k grupos, de modo que de qualquer estado dado não é possível alcançar outro estado do mesmo grupo usando no máximo 199 voos.

Problema 46. (IMO SL 2021) Sejam n e k inteiros positivos com $n > k \geq 1$. Há $2n + 1$ estudantes ao redor de uma mesa circular. Cada estudante S possui $2k$ vizinhos, os k estudantes imediatamente à esquerda de S e os k estudantes imediatamente à direita de S. Suponha que $n + 1$ dos estudantes são mulheres e que os outros n são homens. Prove que alguma das meninas possui pelo menos k meninas entre seus vizinhos.

10 Teoria Extremal

Definição 10.42. Definimos $T_k(n)$ como o grafo k-partido com n vértices que maximiza o número de arestas entre as partes. Escrevemos $t_k(n)$ para o número de arestas de $T_k(n)$. Não é difícil verificar que $T_k(n)$ é único e que, sendo r o resto da divisão de n por k, temos

$$t_k(n) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2} - \frac{r(k-r)}{2k}.$$

Teorema 10.43. (Mantel) Se G é um grafo livre de triângulos, então $e(G) \leq \frac{n^2}{4}$, com igualdade se, e somente se, $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Teorema 10.44. (Turán) Se G é um grafo livre de K_{k+1}, então $e(G) \leq t_k(n)$, com igualdade se, e somente se, $G = T_k(n)$.

10.1 Problemas

Problema 47. São dados 21 pontos sobre uma circunferência. Prove que pelo menos 100 dentre os arcos determinados por estes pontos subentendem ângulos centrais menores ou iguais a 120°.

Problema 48. (OBM 2005) Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar. Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, quantas tentativas são necessárias para conseguirmos fazer com que o rádio funcione? Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se, então, funcionam.

Problema 49. (IMO 2003) Seja A um subconjunto de 101 elementos do conjunto $S = \{1, 2, \dots 10^6\}$. Prove que existem números $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ em S tais que os conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\},\ j = 1, 2, \dots 100$$

são disjuntos dois a dois.

Problema 50. (Mongólia TST 2011) Seja G um grafo que não contém nenhum K_4 como subgrafo. Sabendo que G tem $3k$ vértices, com k inteiro, qual é a quantidade máxima de triângulos em G?

Problema 51. Seja T uma árvore. Mostre que se $T \not\subset G$, então $e(G) \leq (k-1)n$.

Problema 52. (IMO SL 2002) Dentre um grupo de 120 pessoas, alguns pares delas são amigos. Um *quarteto fraco* é um conjunto de quatro pessoas contendo exatamente um par de pessoas que se conhecem. Qual é a quantidade máxima possível de quartetos fracos nesse grupo?

Problema 53. (China TST 2018) Em uma festa com 100 pessoas, cada par de convidados ou se conhece mutuamente ou se desconhece mutuamente. Sabe-se que para cada convidado A na festa existe um convidado B tal que A conhece B, mas A e B não possuem conhecidos em comum. Determine o número máximo de relações de conhecimento nessa festa.

Problema 54. As arestas de um grafo completo com $2n$ vértices, $n \geq 4$, são coloridas de azul e vermelho de modo que não existe um triângulo azul e não existe um subgrafo completo vermelho com n vértices. Determine o menor número possível de arestas azuis.

11 Max-Flow Min-Cut

Definição 11.45. Seja G um grafo orientado e seja $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ uma função peso para as arestas. Fixe dois vértices $s, t \in V(G)$. Um *fluxo* com origem s e destino t é uma função $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$ para todo par $(u,v) \in E(G)$ e para qual vale a *lei de Kirchhoff*:

$$\sum_{v \in V(G)} f(u,v) = \sum_{v \in V(G)} f(v,u)$$

para todo $u \in V(G) \setminus \{s,t\}$. Podemos pensar em $c(u,v)$ como a capacidade da aresta e um fluxo como um possível percurso para distribuirmos água pelas "tubulações"(arestas) a partir de s até chegar em t.

Definição 11.46. Um *corte* de um grafo G é simplesmente uma partição de $V(G) = S \cup T$. No contexto de fluxo, escreveremos

$$c(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v)$$

para a *capacidade* do corte (S,T) e pediremos que $s \in S$ e $t \in T$.

Teorema 11.47. (Max-flow Min-Cut) O valor do maior fluxo de s para t é igual a menor capacidade possível de um corte de G.

Teorema 11.48. (Ore-Gale-Ryzer) Sejam $G = A \cup B$ um grafo bipartido e $f\colon V(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ uma função. Então G possui um f-fator (um subgrafo de G em que cada vértice v possui grau $f(v)$) se, e somente se, valem as seguintes condições:

- (i) $\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{b \in B} f(b)$;
- (ii) $\sum_{x \in X} f(x) \leq \sum_{y \in B \setminus Y} f(y) + e(X,Y)$, para todos $X \subset A, Y \subset B$.

11.1 Problemas

Problema 55. (Índia TST 2019) Há moedas de 2019 em uma mesa. Algumas são colocadas com a cara para cima e outras com a coroa para cima. Um grupo de 2019 pessoas realiza as seguintes operações: a primeira pessoa escolhe qualquer moeda e então a vira, a segunda pessoa escolhe quaisquer duas moedas e as vira e assim por diante, até a 2019-ésima pessoa, que vira todas as moedas. Prove que independentemente de como as moedas estejam dispostas inicialmente, as 2019 pessoas podem organizar uma maneira de realizar as operações a fim de que todas as moedas mostrem a mesma face ao final do processo.

Problema 56. (SL IMO 2021) O Reino de Anisotropia consiste de n cidades. Para quaisquer duas cidades existe exatamente uma estrada de mão única entre elas. Um *caminho* de X para Y é uma sequência de estradas tais que é possível ir de X até Y por meio delas sem retornar a alguma cidade que já foi visitada. Uma coleção de caminhos é chamada *diversa* se não há uma estrada que pertencem a mais de um caminho na coleção.

Sejam A e B duas cidades distintas em Anisotropia. Seja N_{AB} a quantidade máxima de caminhos em uma coleção diversa de caminhos de A até B. De modo semelhante, seja N_{BA} a quantidade máxima de caminhos em uma coleção diversa de caminhos de B até A. Prove que $N_{AB} = N_{BA}$ se, e somente se, a quantidade de estradas partindo de A é igual à quantidade de estradas partindo de B.

Problema 57. (Mongólia TST 2011) Sejam n e d inteiros positivos satisfazendo $d < \frac{n}{2}$. Em um grafo bipartido $G = A \cup B$, cada vértice tem grau menor ou igual a d e $|A| = |B| = n$. Prove que existe uma maneira de acrescentar arestas ao grafo de maneira a torná-lo $2d$-regular.

Problema 58. (Konig) Uma cobertura de vértices de um grafo G é um conjunto $U \subset V(G)$ tal que toda aresta contém pelo menos um vértice em U. Mostre que em um grafo bipartido, o tamanho do maior emparelhamento é igual ao número de vértices na menor cobertura de vértices.

12 Teorema de Menger

Definição 12.49. Dizemos que um conjunto $U \subset V(G)$ *separa* os vértices u e v se $u, v \notin U$ mas qualquer caminho entre u e v em G contém pelo menos um vértice de U, ou seja, u e v pertence a diferentes componentes conexas de $G - U$. Também costumamos chamar U de *corte de vértices.*

Definição 12.50. Dizemos que um conjunto de arestas $S \subset E(G)$ *separa* os vértices u e v se u e v pertencem a componentes conexas distintas de $G - S$. Também costumamos chamar S de *corte de arestas.*

Definição 12.51. Dizemos que um grafo G é k-conexo se $n \geq k + 1$ e, após deletarmos quaisquer $k - 1$ vértices, o grafo permanece conexo, ou seja, todo corte de vértices tem tamanho pelo menos k. O maior k com essa propriedade é chamado de vértice-conectividade de G e é denotado por $\kappa(G)$. Definimos k-aresta-conexo de modo análogo para cortes de arestas e denotamos por $\lambda(G)$ a aresta-conectividade de G.

Teorema 12.52. (Menger para vértices) Seja $uv \notin E(G)$. O tamanho do menor conjunto de vértices que separa u e v é igual ao tamanho da maior coleção de caminhos vértice-disjuntos entre u e v.

Teorema 12.53. (Menger para arestas) Sejam u e v vértices distintos de G. O tamanho do menor conjunto de arestas que separa u e v é igual ao tamanho da maior coleção de caminhos aresta-disjuntos entre u e v.

12.1 Problemas

Problema 59. Mostre que um grafo é k-conexo se, e somente se, existem k caminhos vértice-disjuntos entre quaisquer pares de vértices de G. Mostre também que um grafo é k-aresta-conexo se, e somente se, existem k caminhos aresta-disjuntos entre quaisquer pares de vértices de G.

Problema 60. Mostre que o teorema de Menger é equivalente ao seguinte teorema: sendo S e T conjuntos disjuntos de vértices com $e(S, T) = 0$, então o tamanho do menor conjunto de vértices que S e T é igual ao tamanho da maior coleção de caminhos vértice-disjuntos entre S e T.

13 Referências

[1] Combinatória - Colóquio Brasileiro de Matemática 2021. Disponível em:
https://impa.br/wp-content/uploads/2022/01/33CBM02-eBook.pdf

[2] Extremal and Probabilistic Combinatorics - Colóquio Brasileiro de Matemática 2011. Disponível em:
https://impa.br/wp-content/uploads/2022/01/33CBM02-eBook.pdf

[3] Bollobás, Béla. Modern Graph theory. (Graduate texts in mathematics 63)

[4] Carlos Shine. Curso de Combinatória (Nível 3) - POTI. Aulas 9, 10, 11, 13, 14 e 18. Disponíveis em:
https://poti.impa.br/index.php/site/material