

Semana Olímpica 2025 - Raízes de Polinômios

Prof. Antonio Caminha

3 de fevereiro de 2025

Os problemas aqui reunidos e a teoria necessária para resolvê-los são um extrato do livro *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6 — Polinômios*, de minha autoria e publicado pela editora da SBM. Nele, você encontra muito mais sobre números complexos e polinômios.

Problemas introdutórios

Um **polinômio** (não nulo) $f(x)$, de **grau** n , é uma expressão da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$.

Se $n = 0$ e $a_n = 0$, estamos com o **polinômio nulo**. Se $a_n \neq 0$, dizemos que n é o **grau** do polinômio; nesse caso, escrevemos $\text{gr}(f(x)) = n$.

Os números complexos $a_0, a_1, \dots, a_n$ são os **coeficientes** do polinômio (ou da equação polinomial); a_n é o **coeficiente líder**. O polinômio é **mônico** quando $a_n = 1$ e **constante** quando $n = 0$.

A **equação polinomial de grau** n correspondente é a equação $f(x) = 0$, ou seja,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

A variável x é, em princípio, um número complexo; entretanto, o enunciado de um certo problema pode exigir que ela seja um número *real*.

Um número complexo z é uma **raiz** da equação polinomial acima se a igualdade for verdadeira quando $x = z$, isto é, se o número $f(z)$ for igual a 0. Isso é o mesmo que

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Problema 1 (OCM). *O número real a é raiz do polinômio $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Encontre um polinômio de grau 3 e coeficientes inteiros que tenha a^3 por raiz. Justifique sua resposta.*

Solução. Queremos encontrar inteiros A , B e C tais que $(a^3)^3 + A(a^3)^2 + Ba^3 + C = 0$ ou, ainda,

$$a^9 + Aa^6 + Ba^3 + C = 0.$$

Para tanto, comecemos observando que $a^3 - a^2 + 2a - 1 = 0$, logo, $a^3 = a^2 - 2a + 1$. Utilizando essa igualdade, calculamos

$$\begin{aligned} a^4 &= a^3 \cdot a \\ &= (a^2 - 2a + 1)a \\ &= a^3 - 2a^2 + a \\ &= (a^2 - 2a + 1) - 2a^2 + a \\ &= -a^2 - a + 1. \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} a^6 &= (a^3)^2 = (a^2 - 2a + 1)^2 \\ &= a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 \\ &= (-a^2 - a + 1) - 4(a^2 - 2a + 1) + 6a^2 - 4a + 1 \\ &= a^2 + 3a - 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a^9 &= a^6 \cdot a^3 = (a^2 + 3a - 2)(a^2 - 2a + 1) \\ &= a^4 + a^3 - 7a^2 + 7a - 2 \\ &= (-a^2 - a + 1) + (a^2 - 2a + 1) - 7a^2 + 7a - 2 \\ &= -7a^2 + 4a. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões obtidas acima para a^3 , a^6 e a^9 em $a^9 + Aa^6 + Ba^3 + C$, ficamos com

$$\begin{aligned} a^9 + Aa^6 + Ba^3 + C &= \\ &= (-7a^2 + 4a) + A(a^2 + 3a - 2) + B(a^2 - 2a + 1) + C \\ &= (A + B - 7)a^2 + (3A - 2B + 4)a + (-2A + B + C). \end{aligned}$$

Portanto, basta impor que

$$\begin{cases} A + B - 7 = 0 \\ 3A - 2B + 4 = 0 \\ -2A + B + C = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos $A = 2$, $B = 5$ e $C = -1$, o que fornece o polinômio

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 1.$$

□

Teorema 2 (critério de pesquisa de raízes racionais). *Sejam $n > 1$ inteiro, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficientes inteiros e p e q inteiros não nulos primos entre si. Se $\frac{p}{q}$ for uma raiz de $f(x)$, então $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$. Em particular, se f for mônico, então as possíveis raízes racionais de $f(x)$ são inteiras.*

Prova. A segunda parte é imediata da primeira. Realmente, se $a_n = 1$, uma raiz racional $\frac{p}{q}$ de $f(x)$ é tal que $q \mid 1$, logo, $q = \pm 1$. Então, ela é da forma $\frac{p}{\pm 1} = \pm p$.

Substituindo x por $\frac{p}{q}$ na expressão para $f(x)$, obtemos

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por q^n , ficamos com

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Assim

$$a_0 q^n = p(-a_n p^{n-1} - \dots - a_1 q^{n-1})$$

e

$$a_n p^n = q(-a_{n-1} p^{n-1} - \dots - a_0 q^{n-1}).$$

Portanto,

$$p \mid a_0 q^n \quad \text{e} \quad q \mid a_n p^n.$$

Mas, uma vez que p e q são primos entre si, concluímos que $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$, como queríamos provar. $\square$

Problema 3 (OCM). *Faça os seguintes itens:*

(a) *Se nenhum dos naturais $a_1, a_2, \dots, a_n$ é um quadrado perfeito, mostre que*

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}$$

é raiz de um polinômio $f(x)$ de grau 2^n , coeficientes inteiros e cujo coeficiente do monômio de maior grau é 1.

(b) *Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$ é irracional.*

Solução.

(a) Seja $f_n(x)$ o produto de todos os 2^n fatores da forma

$$x - (\pm \sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} \pm \dots \pm \sqrt{a_n}).$$

Então, f_n é certamente mônico e tem o número dado como uma de suas raízes. Façamos indução sobre n para mostrar que f_n tem coeficientes inteiros, notando que isto é imediato para $n = 1$. Assumindo a validade da afirmação para $n = k$, sejam $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ números naturais satisfazendo as condições do enunciado. Então,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \prod (x + \sqrt{a_{k+1}} \pm \sqrt{a_1} \pm \dots \pm \sqrt{a_k}) \cdot \prod (x - \sqrt{a_{k+1}} \pm \sqrt{a_1} \pm \dots \pm \sqrt{a_k}) \\ &= f_k(x + \sqrt{a_{k+1}}) f_k(x - \sqrt{a_{k+1}}), \end{aligned}$$

com os fatores dos produtórios acima percorrendo todas as 2^k escolhas possíveis de sinais $+$ e $-$. Agora, um cálculo direto dá

$$f_k(x \pm \sqrt{a_{k+1}}) = g(x) \pm \sqrt{a_{k+1}}h(x),$$

para certos polinômios de coeficientes inteiros g e h , com g mônico de grau 2^k e h de grau no máximo $2^k - 1$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= (g(x) + \sqrt{a_{k+1}}h(x))(g(x) - \sqrt{a_{k+1}}h(x)) \\ &= g(x)^2 - a_{k+1}h(x)^2, \end{aligned}$$

e agora é claro que f_{k+1} tem coeficientes inteiros.

(b) O critério de pesquisa de raízes racionais, juntamente com o item (a), mostram que o número dado ou é inteiro ou irracional. Contudo, as estimativas $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$; $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$; $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ e $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$ garantem que

$$11,2 < \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11} < 11,7,$$

de sorte que tal número não é inteiro. $\square$

Teorema 4 (Fundamental da Álgebra — TFA). *Todo polinômio não constante de coeficientes complexos tem uma raiz complexa.*

Para o que segue, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Teorema 5 (Teste da Raiz). *Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{K}$. Se $\alpha \in \mathbb{K}$, então α é raiz de $f(x)$ se, e só se $f(x)$ for divisível por $x - \alpha$ sobre $\mathbb{K}$.*

Prova. Escrevendo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &\quad - (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) \\ &= a_n (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \dots + a_1 (x - \alpha). \end{aligned}$$

Agora, recorde que, para k natural, temos

$$\begin{aligned} x^k - \alpha^k &= (x - \alpha) (x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \dots + \alpha^{k-2} x + \alpha^{k-1}) \\ &= (x - \alpha) q_k(x), \end{aligned}$$

com $q_k(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \dots + \alpha^{k-2} x + \alpha^{k-1}$. Note, também, que $q_k(x)$ tem coeficientes em $\mathbb{K}$, pois $\alpha \in \mathbb{K}$ e (em qualquer um dos casos $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) o conjunto $\mathbb{K}$ é fechado para a multiplicação.

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) &= a_n (x - \alpha) q_n(x) + a_{n-1} (x - \alpha) q_{n-1}(x) + \dots + a_1 (x - \alpha) q_1(x) \\ &= (x - \alpha) (a_n q_n(x) + a_{n-1} q_{n-1}(x) + \dots + a_1 q_1(x)) \\ &= (x - \alpha) q(x), \end{aligned}$$

em que $q(x) = a_n q_n(x) + a_{n-1} q_{n-1}(x) + \dots + a_1 q_1(x)$ tem coeficientes em $\mathbb{K}$.

Em resumo, mostramos que

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha).$$

Portanto, se α for raiz de $f(x)$, então $f(\alpha) = 0$ e a igualdade acima se reduz a $f(x) = (x - \alpha)q(x)$. Como $q(x)$ tem coeficientes em $\mathbb{K}$, isso é o mesmo que dizer que $x - \alpha$ divide $f(x)$ sobre $\mathbb{K}$. Reciprocamente, se $x - \alpha$ dividir $f(x)$ sobre $\mathbb{K}$, digamos, $f(x) = (x - \alpha)g(x)$, então $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)g(\alpha) = 0$. $\square$

Seja $f(x)$ um polinômio de coeficientes complexos e grau n . Se z_1 for uma raiz complexa de $f(x)$ (cuja existência é garantida pelo TFA), vimos acima que

$$f(x) = (x - z_1)f_1(x),$$

para um certo polinômio de coeficientes complexos $f_1(x)$. Assim,

$$n = \text{gr}(f(x)) = 1 + \text{gr}(f_1(x)) \Rightarrow \text{gr}(f_1(x)) = n - 1.$$

Se $n = 1$, então $f_1(x)$ é constante, digamos a , e $f(x) = a(x - z_1)$. Se $n > 1$, então, novamente pelo TFA, podemos tomar uma raiz z_2 de $f_1(x)$. O teste da raiz dá, então,

$$f_1(x) = (x - z_2)f_2(x),$$

para um certo polinômio de coeficientes complexos $f_2(x)$. Argumentando como acima, concluímos que $\text{gr}(f_2(x)) = n - 2$. Também,

$$f(x) = (x - z_1)f_1(x) = (x - z_1)(x - z_2)f_2(x).$$

Se $n = 2$, paramos aqui, pois $f_2(x)$ será constante. Do contrário, repetimos o mesmo raciocínio com $f_2(x)$.

Prosseguindo dessa forma, chegamos eventualmente a

$$f(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n), \quad (1)$$

com $a, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Essa expressão é a **forma fatorada** de $f(x)$.

Agora, seja

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Sendo $z_1, z_2, \dots, z_n$ as raízes complexas de $f(x)$, temos (1). Expandindo os produtos do segundo membro e comparando os coeficientes obtidos com os da expressão inicial para $f(x)$, podemos calcular os valores das expressões

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n,$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n,$$

$$\begin{aligned}
& z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n, \\
& \dots\dots\dots, \\
& z_1 z_2 \dots z_{n-1} + z_1 z_2 \dots z_n + \dots + z_2 z_3 \dots z_n, \\
& z_1 z_2 \dots z_n,
\end{aligned}$$

mesmo sem conhecer as raízes de $f(x)$. Tais expressões são conhecidas como as **somas simétricas elementares** das raízes de $f(x)$.

Por exemplo, quando $n = 3$, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_3(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) \\
&= a_3(x^3 - (z_1 + z_2 + z_3)x^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)x - z_1 z_2 z_3) \\
&= a_3 x^3 - a_3(z_1 + z_2 + z_3)x^2 + a_3(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)x - a_3 z_1 z_2 z_3.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
- a_3(z_1 + z_2 + z_3) &= a_2, \\
a_3(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) &= a_1, \\
- a_3 z_1 z_2 z_3 &= a_0,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 + z_3 &= -\frac{a_2}{a_3}, \\
z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 &= \frac{a_1}{a_3}, \\
z_1 z_2 z_3 &= -\frac{a_0}{a_3}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Essas relações (e, mais geralmente, as relações análogas para as somas simétricas elementares das raízes de um polinômio de grau n) são conhecidas como as **relações de Girard** entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial.

Problema 6 (OCM). *O número real a é raiz do polinômio $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Encontre um polinômio de grau 3 e coeficientes inteiros que tenha a^3 por raiz. Justifique sua resposta.*

Prova. Sendo a , b e c as raízes de $f(x)$, temos $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, de modo que, pelas relações de Girard,

$$a + b + c = 1, \quad ab + ac + bc = 2, \quad abc = 1. \tag{3}$$

Um candidato natural para o polinômio que queremos encontrar é

$$\begin{aligned}
g(x) &= (x - a^3)(x - b^3)(x - c^3) \\
&= x^3 - (a^3 + b^3 + c^3)x^2 + (a^3 b^3 + a^3 c^3 + b^3 c^3)x - a^3 b^3 c^3
\end{aligned}$$

de modo que basta calcular os valores de $a^3 + b^3 + c^3$, $a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3$ e $a^3b^3c^3$.

Para tanto, utilizemos produtos notáveis, (3) e a forma fatorada de $f(x)$:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)^3 - 3(a + b)(a + c)(b + c) \\ &= 1^3 - 3(1 - c)(1 - b)(1 - a) \\ &= 1 - 3f(1) = 1 - 3(1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 &= (ab)^3 + (ac)^3 + (bc)^3 \\ &= (ab + ac + bc)^3 - 3(ab + ac)(ab + bc)(ac + bc) \\ &= 2^3 - 3abc(a + b)(a + c)(b + c) \\ &= 8 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \end{aligned}$$

Por fim, como $a^3b^3c^3 = (abc)^3 = 1^3 = 1$, segue que $g(x) = x^3 - (-2)x^2 + 5x - 1$. $\square$

Problema 7. *Mostre que o polinômio $f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$ tem pelo menos uma raiz complexa não real.*

Problema 8. *Calcule a soma das quintas potências das raízes do polinômio $f(x) = x^3 + x^2 - x + 5$.*

Problema 9 (Canadá). *Seja $f(x)$ um polinômio de grau n , tal que $f(k) = \frac{k}{k+1}$ para todo inteiro $0 \leq k \leq n$. Calcule $f(n+1)$.*

Solução. Veja que $(k+1)f(k) - k = 0$ para todo inteiro $0 \leq k \leq n$. Portanto, pondo $g(x) = (x+1)f(x) - x$, temos que $g(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, tendo os $n+1$ números $0, 1, \dots, n$ por raízes. A forma fatorada de um polinômio diz, pois, que

$$g(x) = ax(x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

para um certo número a . Assim, temos

$$(x+1)f(x) - x = ax(x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Para calcular a , fazemos $x = -1$, obtendo

$$\begin{aligned} 1 &= (-1+1)f(-1) - (-1) \\ &= a(-1)(-1-1)(-1-2)\dots(-1-n) \\ &= a(-1)^{n+1}(n+1)!. \end{aligned}$$

Para calcular $f(n+1)$, fazemos $x = n+1$ na igualdade

$$(x+1)f(x) - x = ax(x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

obtendo

$$\begin{aligned}(n+2)f(n+1) - (n+1) &= a(n+1)n(n-1)\dots 1 \\ &= (n+1)!a = (-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Então,

$$f(n+1) = \frac{(n+1) + (-1)^{n+1}}{n+2}.$$

□

Problema 10 (IMO shortlist). *Ache todos os valores naturais de k tais que o polinômio $x^2 + x + 1$ divide o polinômio $x^{2k} + 1 + (x+1)^{2k}$.*

Solução. Se $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, tem-se $\omega^3 = 1$ e

$$x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2).$$

Então, para que $x^2 + x + 1$ divida $x^{2k} + 1 + (x+1)^{2k}$, é necessário e suficiente que ω e ω^2 sejam raízes desse polinômio.

Como $\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1)$ e $\omega \neq 1$, temos $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, logo $\omega + 1 = -\omega^2$. Então,

$$\begin{aligned}\omega^{2k} + 1 + (\omega + 1)^{2k} &= \omega^{2k} + 1 + (-\omega^2)^{2k} \\ &= \omega^{2k} + 1 + \omega^{4k} \\ &= \omega^{2k} + 1 + \omega^k.\end{aligned}$$

Da mesma forma, $\omega^2 + 1 = -\omega$, logo,

$$\begin{aligned}(\omega^2)^{2k} + 1 + (\omega^2 + 1)^{2k} &= \omega^{4k} + 1 + (-\omega)^{2k} \\ &= \omega^k + 1 + \omega^{2k}.\end{aligned}$$

Assim, temos de encontrar os naturais k para os quais

$$\omega^{2k} + \omega^k + 1 = 0.$$

Consideremos três possibilidades:

- Se $k = 3l$, então $\omega^{2k} + \omega^k + 1 = \omega^{6l} + \omega^{3l} + 1 = 3$.
- Se $k = 3l + 1$, então $\omega^{2k} + \omega^k + 1 = \omega^{6l+2} + \omega^{3l+1} + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$.
- Se $k = 3l + 2$, então $\omega^{2k} + \omega^k + 1 = \omega^{6l+4} + \omega^{3l+2} + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$.

Portanto, os naturais k que queremos são todos, exceto aqueles múltiplos de 3. □

Problema 11 (Putnam). *Dado $n > 2$ natural, seja $A_1 A_2 \dots A_n$ um polígono regular de n lados, inscrito num círculo de raio 1. Calcule o valor do produto $\overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_1 A_3} \cdot \dots \cdot \overline{A_1 A_n}$.*

Solução. Suponha, sem perda de generalidade, que o círculo de raio 1 que circunscreve o polígono $A_1 A_2 \dots A_n$ é o círculo unitário centrado na origem do plano complexo e que $A_1 = 1$ e $A_2 = \omega$, onde $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Então, $A_j = \omega^{j-1}$ para $1 \leq j \leq n$, de sorte que

$$\begin{aligned} \overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_1 A_3} \cdot \dots \cdot \overline{A_1 A_n} &= |1 - \omega| |1 - \omega^2| \dots |1 - \omega^{n-1}| \\ &= |(1 - \omega)(1 - \omega^2) \dots (1 - \omega^{n-1})| \\ &= |f(1)|, \end{aligned}$$

em que $f(x) = (x - \omega)(x - \omega^2) \dots (x - \omega^{n-1})$.

Agora, como $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ são as raízes de $x^n - 1$, temos

$$\begin{aligned} (x - 1)f(x) &= (x - 1)(x - \omega)(x - \omega^2) \dots (x - \omega^{n-1}) \\ &= x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1). \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$, logo, $f(1) = n$. □

Problemas mais difíceis

Problema 12 (Irlanda). *Dado $n \in \mathbb{N}$, ache todos os polinômios $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $a_j \in \{-1, 1\}$, para $0 \leq j \leq n$.

(b) *Todas as raízes de f são reais.*

Solução. Sejam $u_1, u_2, \dots, u_n$ as raízes de um polinômio f satisfazendo as condições do enunciado. Pelas relações de Girard, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= \left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_i u_j \\ &= \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^2 - 2 \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &= 1 - 2(\pm 1) = -1 \text{ ou } 3. \end{aligned}$$

Como todas raízes de f são reais, segue que $\sum_{i=1}^n u_i^2 \geq 0$; então, os cálculos acima dão $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 3$, logo, $a_{n-2} = -a_n$.

Novamente pelas relações de Girard, temos

$$\prod_{i=1}^n u_i^2 = \left(\prod_{i=1}^n u_i \right)^2 = \left((-1)^n \frac{a_0}{a_n} \right)^2 = 1.$$

Então, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica dá

$$3 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n u_i^2} = n.$$

Os casos $n = 1$ e $n = 2$ são de análise imediata.

Se $n = 3$, devemos ter $a_{n-2} = -a_n$, logo, $a_1 = -a_3$. Também, a desigualdade acima torna-se uma igualdade, de modo que $u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = 1$. Multiplicando os polinômios por -1 , se necessário, podemos supor $a_3 = 1$; então, basta examinar quais, dentre os polinômios

$$x^3 + x^2 - x + 1, \quad x^3 + x^2 - x - 1, \quad x^3 - x^2 - x + 1, \quad x^3 - x^2 - x - 1,$$

têm todas as raízes iguais a 1 ou -1 . Testando, vemos que só $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$ e $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ satisfazem as condições. $\square$

Problema 13 (All Union). *Numere as linhas e colunas de um tabuleiro $n \times n$ de 1 a n , respectivamente de cima para baixo e da esquerda para a direita. Dados $2n$ números reais distintos $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, para $1 \leq i, j \leq n$ escreva o número $a_i + b_j$ na casa 1×1 situada na linha i e na coluna j . Se os produtos dos números escritos nas casas das colunas do tabuleiro forem todos iguais, prove que os produtos dos números escritos nas casas das linhas do mesmo também serão todos iguais.*

Problema 14 (IMO - shortlist). *Os números reais a, b e c são tais que existe exatamente um quadrado cujos vértices estão sobre o gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Prove que o comprimento dos lados desse quadrado vale $\sqrt[4]{72}$.*

Problema 15. *Um multiconjunto é uma coleção $\{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$ de objetos não necessariamente distintos (os elementos do multiconjunto), tais que $\{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}\} = \{\{b_1, b_2, \dots, b_m\}\}$ se $m = n$ e cada elemento aparecer uma mesma quantidade de vezes em cada um deles. Sejam $\{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$ e $\{\{b_1, b_2, \dots, b_n\}\}$ dois multiconjuntos distintos, cada um dos quais formado por inteiros positivos. Se*

$$\{\{a_i + a_j; 1 \leq i < j \leq n\}\} = \{\{b_i + b_j; 1 \leq i < j \leq n\}\},$$

prove que n é uma potência de 2.

Prova. Se $f(x) = \sum_{i=1}^n x^{a_i}$ e $g(x) = \sum_{i=1}^n x^{b_i}$, então $f \neq g$,

$$f(x)^2 = \sum_{i=1}^n x^{2a_i} + 2 \sum_{i < j} x^{a_i + a_j} = f(x^2) + 2 \sum_{i < j} x^{a_i + a_j}$$

e

$$g(x)^2 = \sum_{i=1}^n x^{2b_i} + 2 \sum_{i < j} x^{b_i + b_j} = g(x^2) + 2 \sum_{i < j} x^{b_i + b_j}.$$

A condição do enunciado garante que $\sum_{i < j} x^{a_i + a_j} = \sum_{i < j} x^{b_i + b_j}$, de maneira que, subtraindo membro a membro as duas relações acima e fatorando o primeiro membro, obtemos

$$(f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) = f(x^2) - g(x^2). \quad (4)$$

Observe agora que $f(1) = g(1) = n$, e o teste da raiz garante a existência de um inteiro $k \geq 1$ e $h \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(x) - g(x) = (x - 1)^k h(x)$, com $h(1) \neq 0$. Portanto, $f(x^2) - g(x^2) = (x^2 - 1)^k h(x^2)$ e, daí,

$$(f(x) + g(x))(x - 1)^k h(x) = (x^2 - 1)^k h(x^2)$$

ou, ainda,

$$(f(x) + g(x))h(x) = (x + 1)^k h(x^2).$$

Avaliando a igualdade acima em $x = 1$, obtemos finalmente

$$2nh(1) = (f(1) + g(1))h(1) = 2^k h(1),$$

e, a partir de $h(1) \neq 0$, obtemos $n = 2^{k-1}$. □

Problema 16 (OBM).

- (a) *Se $n \in \mathbb{N}$, prove que há somente um número finito de polinômios mônicos, de grau n e coeficientes inteiros, tais que todas as suas raízes complexas têm módulo 1.*
- (b) *Seja $f \in \mathbb{Z}[x] \setminus \mathbb{Z}$ um polinômio mônico, tal que todas as suas raízes complexas têm módulo 1. Prove que todas as raízes complexas de f são raízes da unidade.*