

Problemas que envolvem mais de uma área

Bernardo P. Trevizan

Problema 1. Dizemos que um polígono P está inscrito em outro polígono Q quando todos os vértices de P pertencem ao perímetro de Q . Também dizemos nesse caso que Q é circunscrito a P . Dado um triângulo T , sejam l o valor máximo do lado de um quadrado inscrito em T e L o valor mínimo do lado de um quadrado circunscrito a T . Prove que para todo triângulo T vale a desigualdade $L/l \geq 2$ e ache todos os triângulos T para os quais ocorre a igualdade.

Problema 2. Seja n um inteiro positivo. Mostre que existem inteiros $x_1, x_2, \dots, x_n$, *não todos iguais*, satisfazendo

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n^2 = 0 \end{cases}$$

se, e somente se, $2n - 1$ é composto.

Problema 3. Seja ABC um triângulo e n um inteiro positivo. Sobre o lado BC considere os pontos $A_1, A_2, \dots, A_{2^n-1}$ que dividem o lado em 2^n partes iguais, ou seja, $BA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{2^n-2}A_{2^n-1} = A_{2^n-1}C$. Defina os pontos $B_1, B_2, \dots, B_{2^n-1}$ e $C_1, C_2, \dots, C_{2^n-1}$ sobre os lados CA e AB , respectivamente, de maneira análoga. Trace os segmentos $AA_1, AA_2, \dots, AA_{2^n-1}, BB_1, BB_2, \dots, BB_{2^n-1}$ e $CC_1, CC_2, \dots, CC_{2^n-1}$. Determine, em função de n , em quantas regiões foi dividida a região delimitada pelo triângulo ABC por esses segmentos.

Problema 4. Chamamos uma 7-tupla de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_7)$ de *Fabulosa* se, para cada permutação $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ desses números, temos

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_5 + y_5y_6 + y_6y_7 \geq -1.$$

Ache a maior constante K tal que a desigualdade

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 7} x_i x_j \geq K$$

vale para toda 7-tupla Fabulosa $(x_1, x_2, \dots, x_7)$.

Problema 5. Seja $ABCD$ quadrilátero convexo e P e Q pontos variáveis dentro do quadrilátero de modo que $\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD$. Prove que as retas PQ obtidas variando esses pontos concorrem ou são todas paralelas.

Problema 6. Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Em um polígono convexo de n lados, todas as bissetrizes internas de seus n ângulos internos são traçadas. Determine, em função de n , o menor número possível de retas distintas determinadas por essas bissetrizes.