22ª Vingança Olímpica
26ª Semana Olímpica – Rio de Janeiro, RJ
26 de janeiro de 2023

- Não escreva mais de uma questão por folha.
- Escreva seu nome em cada folha que usar.

Problema 1. Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e para todos $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $|x - y| > \varphi$ existe um inteiro positivo $n < \varphi^{2023}$ tal que

$$f^n(x) + f^n(y) = x + y.$$

Problema 2. Encontre todas as ternas (a, b, n) de inteiros positivos tais que

$$a^3 = b^2 + 2^n.$$

Problema 3. Defina um grande círculo em uma esfera como sendo um círculo que contém dois pontos diametralmente opostos nela. Denote por (AB) o grande círculo que passa por A e B. Defina também um triângulo esférico como sendo 3 pontos na esfera ligados 2 a 2 por grandes círculos. O ângulo entre dois círculos que se intersectam é definido como o ângulo entre as respectivas retas tangentes contidas em seus respectivos planos em um ponto de interseção. Denote por $\sphericalangle XYZ$ o ângulo entre (XY) e (YZ). Dois círculos são tangentes se o ângulo entre eles é 0. Todos os pontos nas figuras a seguir estão contidos em uma esfera S.
Seja ΔABC um triângulo esférico com todos seus ângulos menores que $90°$ tal que um círculo ω é tangente a (BC), (CA) e (AB) em D, E e F, respectivamente. Prove que existe P em S tal que $\sphericalangle PAB = \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle PCA = \sphericalangle FCB$ e $\sphericalangle PBA = \sphericalangle FBC$.

Problema 4. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\}$ o conjunto dos pontos de coordenadas inteiras de $\mathbb{R}^3$. Gugu possui infintas esferas maçiças, todas com raio $r \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$. É possível Gugu cobrir todos os pontos de S com suas esferas sem quebrar, amassar ou cortar suas esferas?

Problema 5. Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível e T o encontro das diagonais. Sejam I_1, I_2, I_3 e I_4 os incentros de $\triangle TAB, \triangle TBC, \triangle TCD$ e $\triangle TDA$, respectivamente e J_1, J_2, J_3 e J_4 os incentros de $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA$ e $\triangle DAB$, respectivamente. Prove que $I_1I_2I_3I_4$ é cíclico numa circunferência de centro $J_1J_3 \cap J_2J_4$.

Problema 6. Dizemos que H permeia G se G e H são grupos finitos e para todo F subgrupo de G existe $H' \cong H$ tal que ou $H' \leq F$ ou $F \leq H' \leq G$. Suponha que um grupo não abeliano H permeie G e seja $S = \{H' \leq G \mid H' \cong H\}$. Prove que

$$\left| \bigcap_{H' \in S} H' \right| > 1.$$

Linguagem: Português | *Tempo: 5 horas.*
Cada problema vale 7 pontos.

Aviso: acima há k problemas em aberto para algum k natural.