

Alguns problemas bacanas

CARLOS GUSTAVO MOREIRA
IMPA

- 1) (CONEMAT-2024). Considere as seqüências de inteiros positivos $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ dadas por:
 $x_1 = 2024, x_{n+1} = x_n^{(x_n^{2024})}, \forall n \geq 1; y_1 = 2, y_{n+1} = 2^{y_n}, \forall n \geq 1.$

Determine o menor inteiro positivo k tal que $y_k > x_{2024}$.

- 2) (P6-IMO-1991). Uma seqüência infinita $x_0, x_1, x_2, \dots$ de números reais é dita limitada se existe uma constante C tal que $|x_i| \leq C, \forall i \geq 0$.

Dado um número real $\alpha > 1$, construa uma seqüência infinita limitada $x_0, x_1, x_2, \dots$ tal que $|x_i - x_j| |i - j|^\alpha \geq 1$ para todo par de naturais distintos i, j .

- 3) (P6-CIIM-2014)

(a) Seja (x_n) uma seqüência com $0 \leq x_n \leq 1$ para todo n . Prove que existe $C > 0$ tal que, para todo inteiro positivo r , existem $m \geq 1$ e $n > m + r$ tais que $(n - m)|x_n - x_m| > C$.

(b) Prove que, para todo $C > 0$, existem uma seqüência (x_n) com $0 \leq x_n \leq 1$ para todo n e um inteiro positivo r tais que se $m \geq 1$ e $n > m + r$ então $(n - m)|x_n - x_m| > C$.

- 4) (P3-IMO-2017) Um coelho invisível e um caçador jogam da seguinte forma no plano euclidiano. O ponto de partida A_0 do coelho e o ponto de partida B_0 do caçador são iguais. Depois de $n - 1$ rodadas do jogo, o coelho encontra-se no ponto A_{n-1} e o caçador encontra-se no ponto B_{n-1} . Na n -ésima rodada do jogo, ocorrem três coisas na seguinte ordem:

(i) O coelho move-se de forma invisível para um ponto A_n tal que a distância entre A_{n-1} e A_n é exatamente 1.

(ii) Um aparelho de localização informa um ponto P_n ao caçador. A única informação garantida pelo aparelho ao caçador é que a distância entre P_n e A_n é menor ou igual a 1.

(iii) O caçador move-se de forma visível para um ponto B_n tal que a distância entre B_{n-1} e B_n é exatamente 1.

É sempre possível que, qualquer que seja a maneira em que se mova o coelho e quaisquer que sejam os pontos informados pelo aparelho de localização, o caçador possa escolher os seus movimentos de modo que depois de 10^9 rodadas o caçador possa garantir que a distância entre ele e o coelho seja menor ou igual que 100?

- 5) Um leão e um homem jogam da seguinte forma em um disco D de raio $R > 0$ contido no plano euclidiano. O ponto de partida A_0 do leão e o ponto de partida B_0 do homem pertencem a D . Depois de $n - 1$ rodadas do jogo, o leão encontra-se no ponto A_{n-1} e o homem encontra-se no ponto B_{n-1} . Na n -ésima rodada do jogo, ocorrem duas coisas na seguinte ordem:

(i) O leão move-se (de forma visível) para um ponto A_n de D tal que a distância entre A_{n-1} e A_n é no máximo 1.

(ii) O homem move-se (de forma visível) para um ponto B_n de D tal que a distância entre B_{n-1} e B_n é no máximo 1.

É sempre possível, para qualquer $R > 0$ e para quaisquer pontos A_0 e B_0 de D que, qualquer que seja a maneira em que se mova o homem, o leão possa escolher os seus movimentos de modo que depois de um certo número n de rodadas consiga alcançar o homem, ou seja, ter $A_n = B_{n-1}$?