

Alguns problemas de teoria dos números

CARLOS GUSTAVO MOREIRA
IMPA

- 1) (OBM-1991). Prove que existem infinitos números da forma $1999 \dots 991$ que são múltiplos de 1991.
- 2) (P3-IMO-1988). Prove que se a e b são inteiros positivos e $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ é um inteiro então $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ é um quadrado perfeito.
- 3) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que 2^n tem mais de 2000 dígitos e tem pelo menos 1000 zeros consecutivos dentre seus 2000 últimos dígitos.
- 4) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que os 2017 últimos dígitos de 2^n pertencem a $\{1, 2\}$.
- 5) (P5-IMO-1989). Prove que, para todo inteiro positivo n , existem n inteiros positivos consecutivos, nenhum dos quais é potência de primo.
- 6) (P5-IMO-1990). Determine todos os inteiros positivos n tais que $\frac{2^n + 1}{n^2}$ é inteiro.
- 7) (P6-IMO-1991). Uma sequência infinita x_0, x_1, x_2, \dots de números reais é dita limitada se existe uma constante C tal que $|x_i| \leq C, \forall i \geq 0$.
Dado um número real $\alpha > 1$, construa uma sequência infinita limitada x_0, x_1, x_2, \dots tal que $|x_i - x_j| |i - j|^\alpha \geq 1$ para todo par de naturais distintos i, j .
- 8) (P6-IMO-1994). Prove que existe um conjunto A de inteiros positivos com a seguinte propriedade: para cada conjunto infinito S de primos, existem dois inteiros positivos $m \in A$ e $n \notin A$, cada um dos quais sendo produto de k elementos distintos de S para algum $k \geq 2$.
- 9) (P3-IMO-1998). Para cada inteiro positivo n , seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n (incluindo 1 e n). Determine todos os inteiros positivos k tais que $d(n^2)/d(n) = k$ para algum inteiro positivo n .
- 10) (P5-IMO-2000). É possível encontrar N divisível por exatamente 2000 primos distintos tal que N divide $2^N + 1$? [N pode ser divisível por potências de primos.]
- 11) Prove que existem infinitos primos da forma $4k + 1$.
- 12) (BANCO-IMO-2000). Determine todas as triplas (a, m, n) de inteiros positivos tais que $a^m + 1 \mid (a + 1)^n$.
- 13) (P5-OBM-1997) Sejam $c \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + c$. Definimos
$$f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f(f^n(x)), \forall n \in \mathbb{N}.$$
Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é pré-periódico se $\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ é finito.
Mostre que $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ é pré-periódico}\}$ é finito.
- 14) Dizemos que um inteiro positivo m é uma potência se $m = a^b$, com $a, b \geq 2$.
Prove que, para todo inteiro positivo n , existe um conjunto A formado por n inteiros positivos tal que, para todo $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, a soma dos elementos de B é uma potência.
- 15) (P6-IMO-2003). Prove que, para todo primo p , existe um primo q tal que $n^p - p$ não é divisível por q , para todo inteiro positivo n .

16) (P4-IMO-2005). Consideremos a sequência infinita a_1, a_2, \dots definida por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \forall n \geq 1.$$

Determine todos os inteiros positivos que são coprimos com todos os termos da sequência.

17) (P5-IMO-2007). Prove que se a e b são inteiros positivos tais que

$$4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2 \text{ então } a = b.$$

18) (P3-IMO-2008). Prove que existe um número infinito de inteiros positivos n tais que $n^2 + 1$ tem um divisor primo maior que $2n + \sqrt{2n}$.

19) (P3-OBM-2012). Qual é o menor natural n para o qual existe k natural de modo que os 2012 últimos dígitos na representação decimal de n^k são iguais a 1?

20) Sejam a e b inteiros positivos tais que $a^n - 1$ divide $b^n - 1$ para todo inteiro positivo n . Prove que $b = a^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

21) Seja p um primo ímpar. Prove que $\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}$.

22) (P6-Ibero-2016). Sejam $k \geq 1$ um inteiro e a_1, a_2, \dots, a_k dígitos. Prove que existem dígitos b_1, b_2, \dots, b_k e um inteiro $n \geq 0$ tais que os últimos $2k$ dígitos de 2^n são, nessa ordem, $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$.

23) (P6-IMO-2017). Um par ordenado (x, y) de inteiros é um *ponto primitivo* se o máximo divisor comum entre x e y é 1. Dado um conjunto finito S de pontos primitivos, demonstre que existem um inteiro positivo n e inteiros a_0, a_1, \dots, a_n tais que, para cada (x, y) de S , se verifica:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 1.$$

24) Prove que existe um número real $\alpha > 1$ tal que, para todo inteiro positivo n , $\{\alpha^n\} = \alpha^n - \lfloor \alpha^n \rfloor \in (1/3, 2/3)$ e, além disso, $\lfloor \alpha^n \rfloor$ é par se, e somente se, n é primo.

25) (P3-OBM-2021). Encontre todos os inteiros positivos k para os quais existe um irracional $\alpha > 1$ e um inteiro positivo N tais que $\lfloor \alpha^n \rfloor$ é um quadrado perfeito menos k para todo n inteiro com $n > N$.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que é menor ou igual a x .