

Congruência e Equações Diofantinas Lineares

Edson Roberto Abe

29 / janeiro / 2025

Congruência a módulo m

Definição: Dados $a, b, m > 0$ inteiros, diz-se que a é côngruo a b módulo m , denotado por:

$a \equiv b \pmod{m}$ quando $m \mid (a - b)$, isto é, existe k que pertence a $\mathbb{Z}$ (inteiros) tal que $a - b = k.m$

Propriedades

i) $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

ii) $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então:

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

$$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$$

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

iii) $a \equiv b \pmod{m}$, então:

$$a + c \equiv b + c \pmod{m}$$

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$$

1 – Prove que $30^{99} + 61^{100}$ é divisível por 31.

2 – Mostre que 41 divide $2^{20} - 1$.

3 – Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.

4 – Provar que $1979^{1980} + 64$ não é primo.

5 (BMO – 2000) – Mostre que, para cada inteiro positivo n , $121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$ é divisível por 2000.

6 – Encontre os três últimos dígitos de 7^{9999} .

7 – Encontre os três últimos dígitos de 13^{398} , sabendo-se que $13^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$.

Pequeno Teorema de Fermat

Seja a um inteiro positivo e p um primo. Então $a^p \equiv a \pmod{p}$.

8 – Prove que $20^{15} - 1$ é divisível por 11.31.61.

9 – Prove que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

10 – Prove que $2^{2021} + 6^{2021} + 1$ é divisível por 19.

Equações Diofantinas Lineares

$\text{Mdc}(1172, 144) = ?$

Algoritmo de Euclides

Q	8	7	5
1172	144	20	4 (mdc)
R	20	4	0

$$1172 = 8 \cdot 144 + 20 \Rightarrow \mathbf{20 = 1172 - 8 \cdot 144}$$

$$144 = 7 \cdot 20 + 4 \Rightarrow \mathbf{4 = 144 - 7 \cdot 20 = 144 - 7 \cdot (1172 - 8 \cdot 144) = 57 \cdot 144 - 7 \cdot 1172}$$

Teorema: A congruência linear $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ tem solução se e somente se d divide b , sendo $d = \text{mdc}(a, m)$.

11 – Resolver a equação $48x + 7y = 17$.

12 – Resolver a equação $11x + 317y = 2$.

13 – Em Marth, existem apenas notas de 3 e 7 marthreais. De quantos modos distintos podemos pagar uma conta de 246 marthreais usando as notas deste planeta?