Congruência e o PTF

Luíze D'Urso

28 de janeiro de 2025

1. Prove que $n^2 + 1$ não é divisível por 3 qualquer que seja o inteiro n.
2. Qual o resto de 6^{100} na divisão por 7?
3. Prove que $30^{99} + 61^{100}$ é divisível por 31.
4. Prove que $43^{101} + 23^{101}$ é divisível por 66.
5. Prove que $a^n + b^n$ é divisível por $a + b$ se n for ímpar.
6. Prove que $1^n + 2^n + ... + (n - 1)^n$ é divisível por n para n ímpar.
7. Prove que entre 51 inteiros quaisquer existem 2 cujos quadrados têm o mesmo resto na divisão por 100.
8. Dizemos que um número natural n é conveniente se $n^2 + 1$ é divisível por 1000001. Prove que entre os números de 1 a 1000000 existe uma quantidade par de números convenientes.
9. Um quadrado perfeito pode terminar em 2?
10. É possível escrever o quadrado de um número natural usando apenas os algarismos 2, 3, 7 e 8?
11. Encontre um número que ao ser somado a $(n^2 - 1)^{1000}.(n^2 + 1)^{1001}$ torna o resultado divisível por n.
12. Encontre o resto da divisão do número $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + ... + 10^{10000000000}$ por 7.
13. Quantos números naturais n existem menores ou iguais a 10000 tais que $2^n - n^2$ é divisível por 7?
14. Seja $p \geq 3$ um primo. Denote por $k = 2.3.5.7...p$ o produto dos números primos de 2 até p. Prove que nem $k - 1$ nem $k + 1$ pode ser quadrado perfeito.
15. Existe um número natural n tal que $n^2 + n + 1$ é divisível por 1955?
16. Prove que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133 qualquer que seja o número natural n.

17. Seja n um número natural tal que $n+1$ é divisível por 24. Prove que a soma de todos os divisores de n também é divisível por 24.
18. O último algarismo do quadrado de um número natural é 6. Prove que o penúltimo algarismo é ímpar.
19. O penúltimo algarismo do quadrado de um número natural é ímpar. Prove que o penúltimo algarismo é 6.
20. Prove que uma potência de 2 não pode terminar com quatro algarismos iguais.
21. Encontre pelo menos um número com 100 algarismos e sem zeros em sua representação decimal que é divisível pela soma de seus algarismos.
22. Escreva um algarismo à esquerda e outro à direita do número 15 de modo que o número obtido seja divisível por 15.
23. Quantos números com quatro algarismos, sendo os dois do meio formando 97, são divisíveis por 45?
24. Encontre o menor número natural divisível por 36 que tem todos os 10 algarismos em sua representação decimal.
25. Prove que o produto do último algarismo do número 2^n com a soma de todos os seus algarismos exceto o último é divisível por 3.
26. A soma dos algarismos de um quadrado perfeito pode ser igual a 1970?
27. Sejam A a soma dos algarismos de 4444^{4444} e B a soma dos algarismos de A. Encontre a soma dos algarismos de B.
28. Qual o resto da divisão de 2^{100} por 101?
29. Qual o resto da divisão de 3^{102} por 101?
30. Prove que $300^{3000}-1$ é divisível por 1001.
31. Encontre o resto na divisão de 8^{900} por 29.
32. Prove que $7^{120}-1$ é divisível por 143.
33. A soma dos números a, b, c é divisível por 30. Prove que $a^5+b^5+c^5$ também é divisível por 30.
34. Seja p um número primo e suponha que p não divide o número a. Prove que existe um número natural b tal que $ab \equiv 1 \pmod{p}$.
35. (Teorema de Wilson) Seja p um número primo. Prove que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
36. Seja n um número natural não divisível por 17. Prove que n^8+1 ou n^8-1 é divisível por 17.