Os Segredos Mais Picantes da Conjugação Isogonal

Prof. Davi Lopes

28ª Semana Olímpica - 28/01/2025

1. Definições Básicas

Definição de Ceviana Isogonal: Dado um ângulo $\angle A$, dizemos que as retas s e t são *cevianas isogonais relativas ao ângulo* $\angle A$ se s é o simétrico de t em relação à bissetriz do ângulo $\angle A$ (Fig. 1).

Definição de Conjugado Isogonal: Dado um triângulo ABC, dizemos que os pontos P e Q são *conjugados isogonais relativos a* ABC se AP e AQ são cevianas isogonais relativas ao ângulo interno $\angle A$; se BP e BQ são cevianas isogonais relativas ao ângulo interno $\angle B$; e se CP e CQ são cevianas isogonais relativas ao ângulo interno $\angle C$ (Fig. 2).

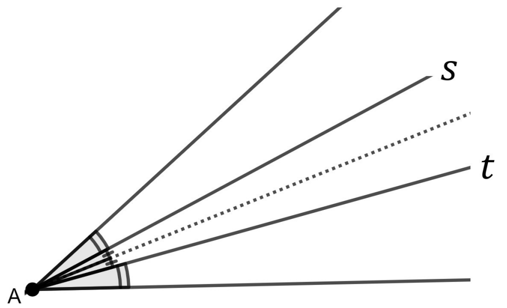

Fig. 1

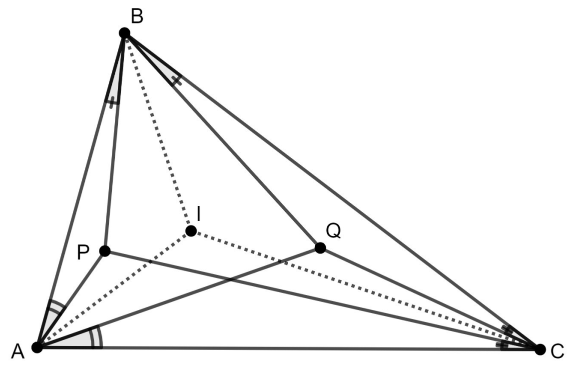

Fig. 2

Observação: usando o teorema de Ceva trigonométrico, pode-se provar que, para qualquer ponto P no plano, existe um único conjugado isogonal Q no plano (possivelmente na reta do infinito).

Notações Usadas: Dado um triângulo ABC e um ponto P no plano, definimos

- P^* → conjugado isogonal de P relativo a ABC;
- P_a → pé da perpendicular de P relativo a $\overleftrightarrow{BC}$ (defina P_b e P_c analogamente);
- P_a^* → pé da perpendicular de P^* relativo a $\overleftrightarrow{BC}$ (defina P_b^* e P_c^* analogamente);
- P_A → interseção de $\overleftrightarrow{AP}$ com $\overleftrightarrow{BC}$ (defina P_B e P_C analogamente);
- P_A^* → interseção de $\overleftrightarrow{AP^*}$ com $\overleftrightarrow{BC}$ (defina P_B^* e P_C^* analogamente);
- P'_A → interseção de $\overleftrightarrow{AP}$ com (ABC), distinto de A (defina P'_B e P'_C analogamente);
- $\widetilde{P}_a$ → simétrico de P relativo a $\overline{BC}$ (defina $\widetilde{P}_b$ e $\widetilde{P}_c$ analogamente).

2. Alguns Segredinhos dos Conjugados Isogonais

A geometria do triângulo é riquíssima, e isso não poderia ser diferente quando estamos falando de conjugados isogonais! A figura a seguir ilustra as notações vistas antes, e também mostra algumas das propriedades mais picantes sobre conjugados isogonais que veremos adiante. Nas propriedades a seguir, estamos considerando um triângulo ABC e um ponto P arbitrário (geralmente no interior de ABC). Os demais elementos seguem as notações vistas antes.

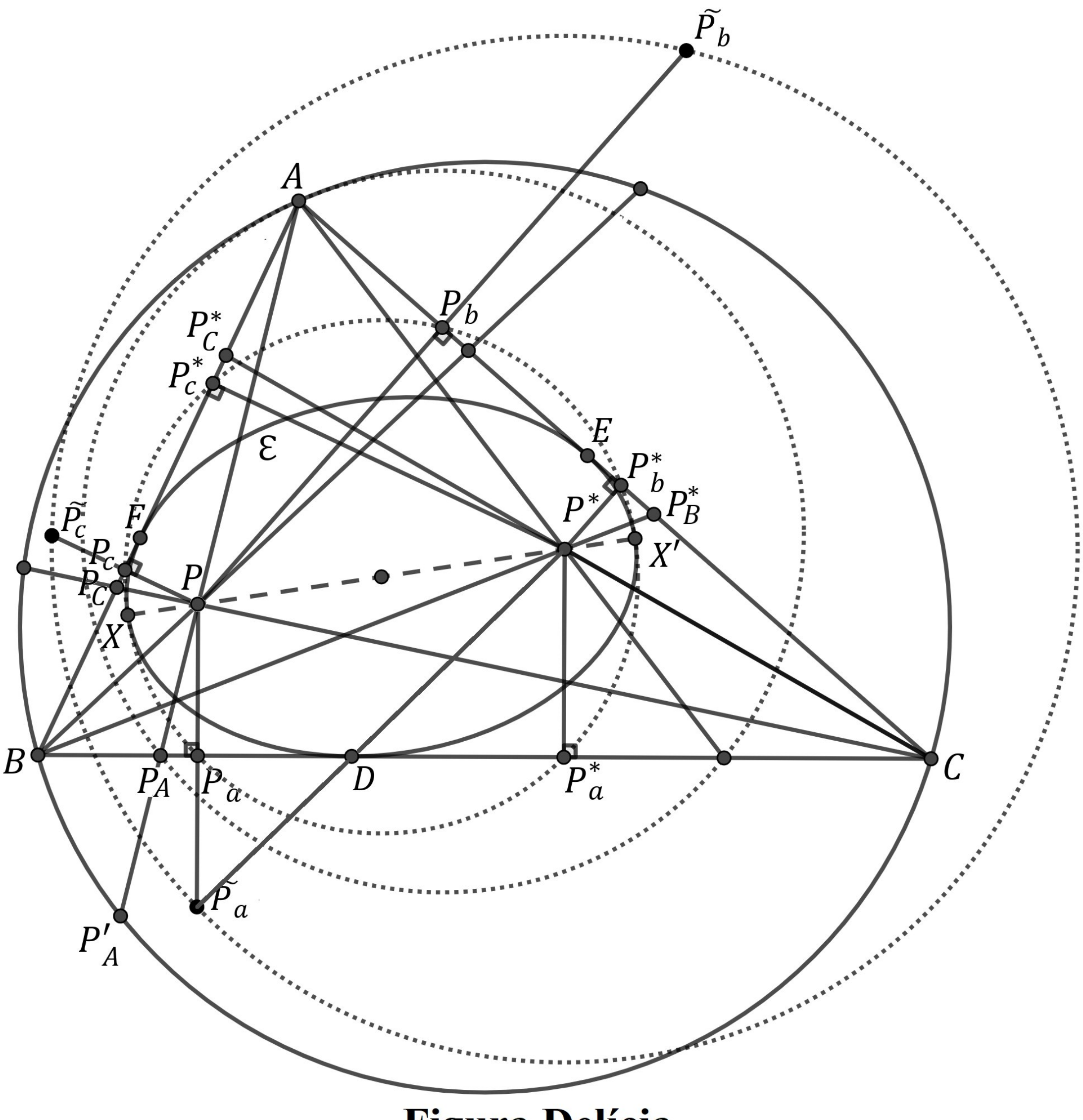

Figura Delícia

Propriedade 1 (Razões Métricas em Conjugados Isogonais):

$$\frac{BP_A}{P_AC} \cdot \frac{BP_A^*}{P_A^*C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Propriedade 2 (Critério Angular de Isogonalidade): Os pontos P e Q são conjugados isogonais relativos ao triângulo ABC se, e somente se,

$$\measuredangle CPA + \measuredangle CQA = \measuredangle CBA \ \ ; \ \ \measuredangle APB + \measuredangle AQB = \measuredangle ACB.$$

Aqui, a igualdade está em ângulos direcionados módulo π. Caso os pontos P e Q estejam no interior do triângulo ABC, tais igualdades se reduzem, em ângulos ordinários, a:

$$\angle CPA + \angle CQA = 180° + \angle B \ \ ; \ \ \angle APB + \angle AQB = 180° + \angle C.$$

Propriedade 3 (Triângulo Pedal): o triângulo pedal $\Delta P_a P_b P_c$ de ABC é diretamente semelhante ao triângulo circunceviano $\Delta P_A^* P_B^* P_C^*$ de P. Além disso, sua área é dada por:

$$[\Delta P_a P_b P_c] = \frac{\left|Pot_{(ABC)}P\right|}{4R^2} \cdot [\Delta ABC],$$

onde R é o circunraio de ABC.

Propriedade 4 (Círculo dos 6 Pontos): Os pontos P_a, P_b, P_c, P_a^*, P_b^*, P_c^* estão numa circunferência cujo centro N é o ponto médio de $\overline{PP^*}$. Tal círculo Γ é definido como o círculo dos 6 pontos de ABC relativo a P.

Propriedade 5 (Conjugados Isogonal como Circuncentro): O ponto P^* é circuncentro do triângulo $\Delta\widetilde{P}_a\widetilde{P}_b\widetilde{P}_c$.

Propriedade 6 (Conjugados Isogonais e Poncelet): Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de focos F_1,F_2 e seja P um ponto no plano.

(i) *(Propriedade Óptica da Elipse):* Se $P \in \mathcal{E}$ e se ℓ a reta tangente a $\mathcal{E}$ por P (Fig. 1), temos $\angle(\ell,\overline{PF_1}) = \angle(\ell,\overline{PF_2})$.

(ii) *(Propriedade Isogonal da Elipse):* Se P é um ponto fora de $\mathcal{E}$ e se A_1,A_2 pontos sobre $\mathcal{E}$ tais que $\overline{PA_1}$,$\overline{PA_2}$ são tangentes a $\mathcal{E}$ (Fig. 2). Então, $\angle A_1PF_1 = \angle A_2PF_2$. Ademais as retas $\overleftrightarrow{F_1P}$ e $\overleftrightarrow{F_2P}$ são bissetrizes dos ângulos $\angle A_1F_1A_2$ e $\angle A_1F_2A_2$, respectivamente.

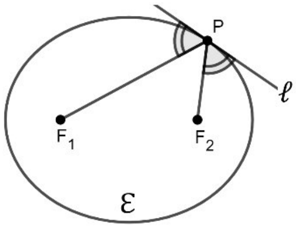

Fig. 1

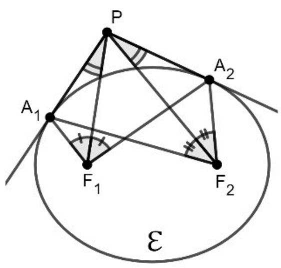

Fig. 2

Observação: As propriedades acima ainda continuam válidas com $\mathcal{E}$ sendo hipérbole.

Propriedade 7 (Conjugados Isogonais e Elipse Tangente): Os pontos P e P^* são os focos da elipse Ɛ, que é tangente aos lados do triângulo ABC (ou seus prolongamentos) nos pontos D, E e F, onde

$$D = \overleftrightarrow{P^*\widetilde{P}_a} \cap \overleftrightarrow{BC}\ ;\ \ E = \overleftrightarrow{P^*\widetilde{P}_b} \cap \overleftrightarrow{CA}\ ;\ \ F = \overleftrightarrow{P^*\widetilde{P}_c} \cap \overleftrightarrow{AB}.$$

Ademais, se o eixo maior de Ɛ é XX', então X e X' estão em Γ.

Propriedade 8 (Conjugados Isogonais e Inversão): Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos BPC e BP^*C, respectivamente. Então:

- O_1 e O_2 são inversos em relação a (ABC);
- Se $\{K,L\} = (ABC) \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}$, então $(K,L;O_1,O_2) = -1$;
- $\overleftrightarrow{AO_1}$ e $\overleftrightarrow{AO_2}$ são cevianas isogonais com respeito ao ângulo interno $\angle BAC$.

Propriedade 9 (Conjugados Isogonais e Inversão $\sqrt{bc}$): Os circuncírculos dos triângulos $AP_AP_A^*$ e ABC são tangentes. Além disso, temos

$$AP'_A \cdot AP_A^* = AB \cdot AC\ ;\ BP'_B \cdot BP_B^* = BC \cdot BA\ ;\ CP'_C \cdot CP_C^* = CA \cdot CB.$$

Por fim, se $\tilde{P}$ e $\widetilde{P^*}$ são as imagens de P e P^* pela inversão $\sqrt{bc}$, então $\tilde{P}$ e $\widetilde{P^*}$ são pares de conjugados isogonais.

Propriedade 10 (Conjugados Isogonais e Homotetia): O insimilicentro e o exsimilicentro dos círculos (BPC) e (BP^*C) estão sobre (ABC).

Propriedade 11 (Conjugados Isogonais e Ponto de Miquel): suponha que a circunferência Γ de centro O intersecta BC em D e D', intersecta CA em E e E', e intersecta AB em F e F'. Se P e Q são os pontos de Miquel de DEF e $D'E'F'$, respectivamente (relativos ao triângulo ABC), então P e Q são conjugados isogonais. Ademais, $OP = OQ$.

Propriedade 12 (Conjugados Isogonais e Antipedais): Seja O o circuncentro de ABC e sejam P, P^* pares de conjugados isogonais relativos a ABC. Seja $(P^*)'$ o simétrico de P^* relativo a O e seja $\Delta T_AT_BT_C$ o triângulo antipedal de P^*, isto é, o triângulo formado pelas interseções das perpendiculares a AP^*, BP^*, CP^* por A, B, C, respectivamente. Então:

- P^* e $(P^*)'$ são pares de conjugados isogonais relativos a $\Delta T_AT_BT_C$;
- $\Delta P_AP_BP_c \cup P$ é diretamente semelhante a $\Delta T_AT_BT_C \cup (P^*)'$;
- Se Q é o conjugado isogonal de P em $\Delta P_AP_BP_c$, então $PQ \parallel OP^*$.

Propriedade 13 (Lema da Reta Isogonal): Sejam s e t duas cevianas isogonais relativas ao ângulo $\angle BAC$, e sejam P e Q pontos em s e t, respectivamente. Se BP intersecta CQ em X e BQ intersecta CP em Y, então AX e AY são cevianas isogonais relativas a $\angle BAC$.

3. Pares de Conjugados Isogonais Notáveis no Triângulo

Dado um triângulo ABC, temos as seguintes conjugações isogonais entre os pontos notáveis abaixo. Alguns deles não são tão notáveis assim, então pesquise no Google o significado de cada um deles! :P

Ponto Notável	***Conjugado Isogonal***
Incentro e Excentros	Incentro e Excentros
Ortocentro	Circuncentro
Baricentro	Ponto de Lemoine
Ponto de Gergonne	Insimilicentro do circuncírculo e incírculo
Ponto de Nagel	Exsimilicentro do circuncírculo e incírculo
Humpty Points	Dumpty Points
Pontos de Fermat	Pontos Isodinâmicos
Centro do Círculo dos 9 Pontos	Ponto de Kosnita

4. Conjugados Isogonais em Polígonos

Será que é possível estender as propriedades vistas dos conjugados isogonais em polígonos com mais de três lados? Algumas delas sim, outras não. Mas antes, vejamos como definir conjugados isogonais de modo mais geral.

Definição de Conjugado Isogonal em Polígonos: Seja $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono, não necessariamente convexo, no plano. Dado um ponto P no plano, dizemos que Q é o conjugado isogonal de P relativo ao polígono $A_1A_2\ldots A_n$ se, para todo $i = 1,2,\ldots,n$ (considere aqui índices módulo n), vale a seguinte igualdade, considerando ângulos direcionados módulo π:

$$\measuredangle A_{i-1}A_iP = \measuredangle QA_iA_{i+1}.$$

Diferente do caso de triângulos, nem sempre um ponto arbitrário tem um conjugado isogonal com respeito a um polígono. Por isso, vejamos um critério que é uma generalização do círculo dos 6 pontos, e que, quando ele é atendido, nos permite generalizar naturalmente algumas propriedades.

Critério para Existência de Conjugado Isogonal: Existe o conjugado isogonal de P relativo ao polígono $A_1A_2\ldots A_n$ se, e só se, uma das duas condições seguintes ocorrer:

1. Se P_i é o pé da perpendicular de P a A_iA_{i+1}, então $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são concíclicos;
2. Existe uma cônica $\mathcal{E}$ com foco em P e tangente a A_iA_{i+1}, para todo $i = 1,2,\ldots,n$.

Se esse for o caso, sendo P^* o conjugado isogonal de P relativo ao polígono $A_1A_2\ldots A_n$, e sendo 0 é o pé da perpendicular de P^* a A_iA_{i+1}, temos que os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e ${P_1}^*, {P_2}^*, \ldots, {P_n}^*$ estão sobre uma mesma circunferência Γ, cujo centro é o ponto médio de PP^*. Ademais, P e P^* são os focos de $\mathcal{E}$.

Quando $n = 4$, esse critério possui uma forma alternativa bem simpática!

Existência de Conjugado Isogonal em Quadriláteros: se $ABCD$ é um quadrilátero convexo e P é um ponto em seu interior, então P tem conjugado isogonal se, e somente se, $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

Nem precisamos usar perpendicularidade para usar esse critério geral. Tudo o que precisamos é de um ângulo orientado fixo saindo do ponto P!

Critério Geral de Existência de Conjugado Isogonal: Dado um ângulo $\alpha \in (0, \pi)$, seja P_i o único ponto na reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ tal que $\sphericalangle\left(\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overleftrightarrow{PP_i}\right) = \alpha$. Então, P possui um conjugado isogonal relativo ao polígono $A_1A_2 ... A_n$ se, e somente se, P_1, P_2, ..., P_n estão numa mesma circunferência Γ_α. Neste caso, sendo P^* o conjugado isogonal de P relativo ao polígono $A_1A_2 ... A_n$ e sendo e P_i^* o único ponto na reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ tal que $\sphericalangle\left(\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overleftrightarrow{P^*P_i^*}\right) = -\alpha$, para todo i, temos que P_i^* está em Γ_α . Ademais, o centro O_α de Γ_α está na mediatriz de $\overline{PP^*}$ e é tal que $\sphericalangle O_\alpha PP^* = 90° - \alpha$.

5. Problemas Propostos

Problema 1: Seja ABC um triângulo com incentro I e seja $\omega = (BIC)$. Sendo P^* o conjugado isogonal de P relativo a ABC, prove que $AP = AP^*$ se, e somente se, $P \in \omega$.

Problema 2: Se O e H são o circuncentro e o ortocentro do triângulo acutângulo ABC, mostre que $IO = IH$ se, e somente se, um dos ângulos de ABC é 60°.

Problema 3: Prove que a ceviana isogonal de AP relativo a $\angle BPC$ e a ceviana isogonal de AP^* relativo a $\angle BP^*C$ são simétricas em relação a BC.

Problema 4: Seja P um ponto na mediatriz de mediBC e seja P' seu inverso com respeito ao circuncírculo de ABC. Prove que AP e AP' são cevianas isogonais relativos a $\angle BAC$.

Problema 5 (IMO Shortlist/2000): Existem pontos D, E, F sobre os lados BC, CA, AB de um triângulo acutângulo ABC, respectivamente, tal que AD, BE, CF concorrem e

$$OD + DH = OE + EH = OF + FH = R,$$

onde R é o circunraio de ABC?

Problema 6 (IMO/2004): No quadrilátero convexo $ABCD$, a diagonal BD não bissecta nem o ângulo $\angle ABC$, nem o ângulo $\angle CDA$. O ponto P está no interior de $ABCD$ e satisfaz

$$\angle PBC = \angle DBA \quad ; \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Prove que $ABCD$ é cíclico se, e somente se, $AP = CP$.

Problema 7 (IMO Shortlist/2008): É dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Prove que existe um ponto P dentro do quadrilátero tal que

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90°$$

se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

Problema 8: Seja ABC um triângulo dado. Suponha que D e E são pontos no plano tais que $BD \parallel CE$ e AD, AE são cevianas isogonais com respeito a $\angle BAC$. Se $P = BE \cap CD$, prove que P está na bissetriz de $\angle BAC$ e $BD \parallel AP$.

Problema 9: Seja ABC um triângulo dado. Os triângulos retângulos ABD e ACE com hipotenusas AD e AE são construídas sobre os lados AB e AC externamente ao triângulo ABC, Se $\angle BAD = \angle CAE$ e $H = CD \cap BE$, prove que $AH \perp BC$.

Problema 10: Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, sejam I e J os incentros dos triângulos ABC e ADC, respectivamente, e sejam I' e J' os $A -$ excentros dos triângulos ABC e ADC, respectivamente. Se $E = IJ' \cap I'J$, prove que E está na bissetriz de $\angle BCD$.

Problema 11: Seja I o incentro do triângulo ABC, seja M o ponto médio de AI e suponha que BI, CI intersectam (ABC) novamente em E e F, respectivamente. Tome pontos X e Y em AE e AF, respectivamente, tais que $\sphericalangle XBC = \sphericalangle ABM$ e $\sphericalangle YCB = \sphericalangle ACM$. Prove que I, X e M são colineares.

Problema 12: Seja P um ponto no interior do quadrilátero convexo $ABCD$. Os pontos Q_1 e Q_2 estão localizados no interior de $ABCD$ de modo que

$$\angle Q_1BC = \angle ABP; \angle Q_1CB = \angle DCP; \angle Q_2AD = \angle BAP; \angle Q_2DA = \angle CDP.$$

Prove que $Q_1Q_2 \parallel AB$ se, e somente se, $Q_1Q_2 \parallel CD$.

Problema 13 (USAMO/2008): Seja ABC um triângulo e seja M o ponto médio de BC. A reta AM intersecta as mediatrizes de AB e AC em D e E, respectivamente. As retas BD e CE se intersectam em F. Prove que A, F, O e os pontos médios de AB e AC são concíclicos.

Problema 14 (USA TST/2010): Sejam P e Q pares de conjugados isogonais com respeito ao triângulo ABC, e seja D um ponto sobre BC. Prove que $\angle APB + \angle DPC = 180°$ se, e somente se, $\angle AQC + \angle DQB = 180°$.

Problema 15 (APMO/2010): Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB > BC$ e $AC > BC$. Denote por O e H o circuncentro e ortocentro de ABC, respectivamente. Suponha que $(AHC) \cap AB = M \neq A$ e $(AHC) \cap AC = N \neq A$. Prove que o circuncentro de MNH está na reta OH.

Problema 16: Seja O o circuncentro de ABC e suponha que as tangentes ao circuncírculo de ABC em A, B, C formem um triângulo XYZ. Sendo DEF o triângulo órtico de ABC, prove que o conjugado isogonal de O relativo a DEF é o ortocentro de XYZ.

Problema 17: Seja ABC um triângulo e sejam P, Q pares de conjugados isogonais relativos a ABC. Sejam A', B', C' as interseções de AP, BP, CP com BC, CA, AB, respectivamente, e sejam a, b, c as reflexões de AQ, BQ, CQ em $B'C', C'A', A'B'$, respectivamente. Prove que a, b, c são concorrentes.

Problema 18: Dado um triângulo ABC, seja D um ponto arbitrário em seu interior que não está sobre os lados de ABC. Seja E um ponto sobre a isogonal de CD com respeito ao ângulo $\angle ACB$. Seja F a interseção da isogonal de BD relativo a $\angle ABC$ com a isogonal de AE relativo a $\angle BAC$.

Prove que as retas AD, BE e CF são concorrentes.

Problema 19: Seja DEF o triângulo pedal de P com respeito a ABC (D, E, F em BC, CA, AB, respectivamente) e sejam X,Y,Z pontos nas semirretas PD, PE, PF, respectivamente, tais que $PD \cdot PX = PE \cdot PY = PF \cdot PZ$. Prove que AX, BY, CZ concorrem num ponto cujo conjugado isogonal está na reta OP^*, em que P^* é o conjugado isogonal de P com respeito a ABC.

Exemplo 20 (OBM/2020): Sejam r_A,r_B,r_C semirretas de origem P. O círculo ω_A, de centro X, é tangente a r_B e r_C; o círculo ω_B, de centro Y, é tangente a r_C e r_A; e o círculo ω_C, de centro Z, é tangente a r_A e r_B. Suponha que P está no interior do triângulo XYZ, de modo que r_A,r_B,r_C sejam tangentes comuns internas aos círculos correspondentes. Sejam s_A a reta tangente internamente a ω_B,ω_C que não contém r_A, s_B a reta tangente internamente a ω_C,ω_A que não contém r_B e s_C a reta tangente internamente a ω_A,ω_B que não contém r_C. Prove que s_A,s_B,s_C têm um ponto comum Q, e prove que P e Q são conjugados isogonais no triângulo XYZ, ou seja, as retas XP e XQ são simétricas com relação à bissetriz interna de $\angle YXZ$ e as retas YP e YQ são simétricas com relação à bissetriz interna de $\angle XYZ$.

Problema 21 (Sharygin/2024): Sejam AA', BB', CC' as bissetrizes de um triângulo ABC. Os segmentos BB' e AC' se intersectam em D. Seja E a projeção de D em AC. Os pontos P e Q estão sobre os lados AB e BC, respectivamente, tais que $EP = PD$ e $EQ = QD$. Demonstre que $\angle PDB' = \angle EDQ$.

Problema 22 (RMM Shortlist/2023): Um ponto P é escolhido dentro de um triângulo ABC com circuncírculo Ω. Seja Γ a circunferência passando pelos circuncentros dos triângulos APB, BPC e CPA. Suponha que Ω e Γ se intersectem em X e Y e seja Q o simétrico de P em relação a XY. Prove que $\angle BAP = \angle CAQ$.

Problema 23: Dado um triângulo ABC, seja F seu ponto de Fermat, e sejam S_1, S_2 os primeiro e segundo pontos isodinâmicos, respectivamente. Seja S_1' o simétrico a S_1 com respeito a BC. Prove que $\angle AS_2S_1 = \angle FS_2S_1'$. Além disso, prove que $FS_1 \parallel HO$, onde H e O são o ortocentro e circuncentro de ABC.

Problema 24: Seja l_1 uma reta conectando o primeiro ponto de Fermat e o segundo ponto isodinâmico, seja l_2 uma reta conectando o segundo ponto de Fermat e o primeiro ponto isodinâmico, e seja l_3 a reflexão de l_1 com respeito a BC, e seja $X = l_2 \cap l_3$. Prove que $\angle BXC = 60°$.

Problema 25 (Vingança/2024 + USA TST/2025TST/2): Seja $A_1A_2 \ldots A_n$ um $n-$ ágono cíclico com circuncentro O e sejam P e Q dois conjugados isogonais dele. Seja P_i o circuncentro de PA_iA_{i+1} e Q_i o circuncentro de QA_iA_{i+1}, para $i = 1,2,\ldots,n$ (considere sempre índices módulo n). Prove que:

(a) $P_1P_2 \ldots P_n$ e $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ são cíclicos, com centros O_P e O_Q, respectivamente.

(b) O, O_P, O_Q são colineares.

(c) $O_PO_Q \parallel PQ$.

(d) Agora, para cada k inteiro positivo, defina os pontos P_i^k e Q_i^k de maneira recursiva como:

- $P_i^1 = Q_i^1 = A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$;)
- P_i^{k+1} e Q_i^{k+1} são os circuncentros de $PP_i^kP_{i+1}^k$ e $QQ_i^kQ_{i+1}^k$, resp. $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Prove que $P_1^nP_2^n \ldots P_n^n$ e $Q_1^nQ_2^n \ldots Q_n^n$ são concíclicos.