Construções em Teoria dos Números

Carlos Shine

1 Algumas ferramentas da teoria dos números

- *Divisibilidade*: se d divide a e b, então d divide $ax + by$, com x, y inteiros. Use esse fato para diminuir $ax + by$. Isso nos leva ao...
- *Teorema de Bezout*: o menor número positivo da forma $ax + by$, a, b, x, y inteiros, a, b fixados, é $\mathrm{mdc}(a, b)$.
- *Congruência e restos*: dizemos que $a \equiv b \pmod{m}$ quando a e b deixam o mesmo resto na divisão por m ou, equivalentemente, quando m divide $a - b$.
- *Desigualdades importantes*: se d divide a então $|d| \le |a|$ ou $a = 0$. Ou seja, o divisor é menor do que o múltiplo, se o múltiplo não for 0. Outra desigualdade importante é que o resto é menor do que o módulo do divisor.
- *Resíduos quadráticos*: um resto r é um *resíduo quadrático módulo* m quando existe x tal que $x^2 \equiv r \pmod{m}$. Para $m = 3$ e $m = 4$, os resíduos quadráticos são 0 e 1. Para $m = 5$ e $m = 8$, os resíduos quadráticos são 0, 1 e 4.
- *Dígitos e módulo* 9: sendo $s(n)$ a soma dos dígitos de n, $s(n) \equiv n \pmod{9}$. Em outras palavras, em muitos problemas de dígitos vale a pena ver módulo 9.
- *Mais dígitos*: a concatenação de a e b é $10^k a + b$, em que k é a quantidade de dígitos de b. Note que você não necessariamente precisa considerar todos os dígitos de a e b.
- *Inverso módulo* m: o inverso de a módulo m é o valor de x, se existir, tal que $ax \equiv 1 \pmod{m}$. Nesse caso, denotamos $x = a^{-1}$. O inverso de a existe se, e somente se, $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$.
- *Teorema Chinês dos Restos*: se m e n são primos entre si, para quaisquer a, b inteiros existe x tal que $x \equiv a \pmod{m}$ e $x \equiv b \pmod{n}$. Isso pode ser generalizado para mais de dois divisores; quaisquer dois precisam ser primos entre si.
- *Teorema de Euler-Fermat*: se $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$ então $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, $\varphi(m) = m \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
- *Equação de Pell*: sendo d um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito, a equação diofantina $x^2 - dy^2 = 1$ tem infinitas soluções (x, y); as soluções são dadas por $x + y\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n$, em que (x_0, y_0) é a solução com $x_0 + y_0\sqrt{d}$ mínimo.

2 Algumas dicas heurísticas

- Tente sempre a construção mais simples primeiro. Vai que o problema é fácil.
- Muitas vezes, a construção que dá certo é a mais simples depois de ser um pouco modificada. Ou seja, não abandone completamente uma construção que não deu certo.
- Tente usar identidades algébricas para achar infinitas soluções.

- Tenha consciência de que, em muitos problemas, há várias possibilidades de construção. Na hora de estudar, vale a pena aprender mais de uma construção para um mesmo problema, especialmente para entender quando certas construções dão certo e quando dão errado.
- Se houver mais de uma condição a ser satisfeita, geralmente é melhor lidar com a mais difícil primeiro.
- Por outro lado, se uma condição é muito fácil, começamos com essa para não se preocupar mais com ela.
- Se estamos trabalhando com quantidade de divisores ou primos, lembre-se que sempre existe um primo suficientemente grande.
- Estude casos pequenos! Em teoria dos números, às vezes a "pequeneza" do caso é refletida na quantidade de fatores primos, ou seja, o caso pequeno é primo ou potência de primo.
- Em problemas de sequências que satisfazem duas condições, vale a pena definir os seus termos de dois em dois, usando um termo para satisfazer uma condição e o outro termo para satisfazer a outra condição.

3 Problemas

1. (Cone Sul 2017) Um número inteiro positivo n se denomina *guayaquileño* se a soma dos dígitos de n é igual à soma dos dígitos de n^2. Achar todos os possíveis valores que pode assumir a soma dos dígitos de um número guayaquileño.
2. (Cone Sul 2014) Um par de inteiros positivos (a, b) é *charrua* se existe um inteiro positivo c tal que $a+b+c$ e $a \cdot b \cdot c$ são ambos quadrados perfeitos; caso tal número c não exista, o par é *não-charrua*.
   (a) Demonstre que existem infinitos pares não-charruas.
   (b) Demonstre que existem infinitos inteiros positivos n para os quais o par $(2, n)$ é charrua.
3. (Cone Sul 2016) Diremos que três inteiros distintos são *amigáveis* se um deles divide o produto dos outros dois. Seja n um número inteiro positivo.
   (a) Demonstrar que não existem três inteiros amigáveis no intervalo $(n^2, n^2 + n)$.
   (b) Determinar se para cada n existem três inteiros amigáveis no intervalo $(n^2, n^2 + n + 3\sqrt{n})$.
4. (Cone Sul 2018) Considere o produto $P_n = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!$ onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ para todo n inteiro positivo.
   (a) Encontrar todos os inteiros positivos m para os quais $\frac{P_{2020}}{m!}$ é um quadrado perfeito.
   (b) Demonstrar que existem infinitos valores de n para os quais $\frac{P_n}{m!}$ é quadrado perfeito para pelo menos dois valores inteiros positivos de m.
5. (Cone Sul 2019) Dizemos que um inteiro positivo M de $2n$ dígitos é *hiperquadrado* se satisfaz às seguintes três condições:
   - M é quadrado perfeito.
   - O número formado pelos n primeiros dígitos de M é um quadrado perfeito.
   - O número formado pelos n últimos dígitos de M é um quadrado perfeito e tem exatamente n dígitos (não começa com zero).

   Encontrar um número hiperquadrado de 2000 dígitos.

6. (Cone Sul 2022) Um número inteiro $n > 1$, cujos divisores positivos são $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$, é *sureño* se todos os números

$$d_2 - d_1, d_3 - d_2, \ldots, d_k - d_{k-1}$$

são divisores de n.

   (i) Encontre um inteiro positivo que não é sureño e possui exatamente 2022 divisores positivos que são sureños.

   (ii) Mostre que existem infinitos inteiros positivos que não são sureños e possuem exatamente 2022 divisores positivos que são sureños.

7. (Cone Sul 2020) Dados 2021 inteiros positivos distintos não divisíveis por 2^{1010}, demonstrar que é sempre possível escolher 3 deles, digamos a, b e c, tais que $|b^2 - 4ac|$ não seja um quadrado perfeito. (Observação: $|x|$ representa o valor absoluto de x.)

8. (Cone Sul 2022) Mostre que para todo inteiro positivo n, existe um inteiro positivo k, tal que cada um dos números $k, k^2, \ldots, k^n$ possui pelo menos um bloco 2022 na sua representação decimal.

   Por exemplo, os números 4**2022**13 e 544**2022**1**2022** possuem pelo menos um bloco 2022 na sua representação decimal.

9. (Cone Sul 2008) Dizemos que um número é *capícua* se ao inverter a ordem de seus algarismos obtivermos o mesmo número. Achar todos os números que têm pelo menos um múltiplo não-nulo que seja capícua.

10. (Cone Sul 2010) Determine se existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros não negativos que satisfaz as seguintes condições:

   (i) Todos os números inteiros não negativos aparecem na sequência uma única vez.

   (ii) A sequência
   $$b_n = a_n + n, \quad n \geq 0,$$
   é formada por todos os números primos, cada um aparecendo uma única vez.

11. (Cone Sul 2002) Dizemos que um inteiro n, $n > 1$, é *ensolarado* se ele é divisível pela soma dos seus fatores primos. Por exemplo, 90 é ensolarado pois $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $2 + 3 + 5 = 10$ divide 90. Mostre que existe um número ensolarado com pelo menos 10^{2002} fatores primos distintos.

12. (Cone Sul 2003) Demonstrar que existe uma sequência de inteiros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ que satisfaz as duas condições seguintes:

   (i) contém exatamente uma vez cada um dos inteiros positivos,

   (ii) para cada $n = 1, 2, \ldots$ a soma parcial $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ é divisível por n^n.