

Deixando a preguiça de lado (ou não)

Semana Olímpica 2025

Diego Eloi

Alguns problemas de olimpíada de matemática podem ser resolvidos na *força bruta* ou *na raça*. Estes problemas nos mostram que faz parte de um bom solucionador de problemas saber fazer contas. Você já perdeu algum(ns) ponto(s) por ter errado alguma conta em um problema de olimpíada (pode ter sido até na OBM 2024)? Você não está sozinho! Faz parte errar alguma conta, mas isso pode também ser treinado. Não fuja das contas, não fuja dos problemas *feios*.

A matemática vai muito além de saber fazer contas, mas não precisamos sempre subestimar questões onde fazer contas, desenvolver equações ou até mesmo fatorar é o coração do problema. Há dias nos quais a gente não tem tanta criatividade, então, o que fazer? **Deixa a preguiça de lado e faz as contas!** Nos problemas a seguir, você pode conseguir soluções mais rápidas e criativas, mas caso essa ideia não venha rapidamente, tente utilizar de manipulações algébricas simples como fatorações ou produtos notáveis. Nos problemas de desigualdades, existem soluções mais rápidas usando desigualdades nem tão elementares, mas por que não tentar resolver com desigualdades das médias ou Cauchy-Schwarz?

Sistemas de Equações

1. Encontre as soluções inteiras do sistema de equações
$$\begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 325 \\ x+y+x^3+y^3 = 8150 \end{cases}$$
2. (OBM) Encontre as soluções inteiras e não negativas $z \leq y \leq x$ para o sistema de equações $x+y+z=77$ e $xy+xz+yz+xyz=946$
3. Encontre as soluções $(x, y) \in \mathbb{R}$ do sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} = 5 \\ 3x^2+4xy = 24 \end{cases}$$

4. Encontre todas as soluções reais do sistema:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{5}{12}, \\ x^3+y^3+z^3 &= 45. \end{aligned}$$

5. (EGMO/19) Encontre todas as triplas (a, b, c) de números reais tais que $ab+bc+ca=1$ e

$$a^2b+c=b^2c+a=c^2a+b.$$

6. Encontre os reais a, b, c e d que satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{cases} a \cdot b + c + d &= 6, \\ b \cdot c + d + a &= 2, \\ c \cdot d + a + b &= 5, \\ d \cdot a + b + c &= 3. \end{cases}$$

Algumas problemas de desigualdades

7. Prove que se a, b e c são números reais positivos, então vale a seguinte desigualdade:

$$\frac{a+3c}{a+b} + \frac{c+3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} \geq 6.$$

8. (USAMO/18) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a+b+c = 4\sqrt[3]{abc}$. Prove que

$$2(ab+bc+ca) + 4\min(a^2, b^2, c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

9. (USAMO/11) Sejam a, b, c reais positivos tais que $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$. Prove que

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

10. (USAMO/09) Para $n \geq 2$ sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos tais que

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq \left(n + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Prove que $\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 4 \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

11. (USAMO/16) Encontre o menor valor possível de

$$\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4}$$

dado que a, b, c, d são números reais não negativos tais que $a+b+c+d = 4$. **Dica:** use o truque da reta tangente.