

Desigualdades Geométricas

Edson Roberto Abe

28 / janeiro / 2025

(1) $AB + BC \geq AC$

1 – Se a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são os lados de um pentágono convexo e se d_1, d_2, d_3, d_4 e d_5 são os comprimentos de suas diagonais, prove que

$$\frac{1}{2} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} < 1.$$

2 – Se a, b, c são números positivos, então $\sqrt{a^2 + ac + c^2} \leq \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2}$.

3 – Se m_a, m_b , e m_c são os comprimentos das medianas de um triângulo com lados a, b e c , respectivamente, prove que é possível construir um triângulo com lados de tamanho m_a, m_b , e m_c , e que

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

4 (Desigualdade de Ptolomeu) – Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo, então $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$. A igualdade ocorre se e somente se $ABCD$ é um quadrilátero cíclico.

5 – Se a, b, c são números positivos com $c < a$ e $c < b$, prove que $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

$$(2) S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = p \cdot r$$

$$a = y + z, b = x + z, c = x + y \Rightarrow 2p = 2(x + y + z) \Rightarrow p = x + y + z$$

$$p - a = x, p - b = y, p - c = z \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}$$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \text{ e } R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S} = \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}$$

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9, \text{ com igualdade se e somente se } a = b = c$$

$$\text{Desigualdade de Nesbitt: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

6 (Índia – 2003) – Sejam a, b, c os lados de um triângulo ABC . Se construirmos um triângulo $A'B'C'$ com lados $a + \frac{b}{2}, b + \frac{c}{2}, c + \frac{a}{2}$, prove que $\text{área}(A'B'C') \geq (9/4) \cdot \text{área}(ABC)$.

7 – Seja ABC um triângulo equilátero de lado a . Seja M um ponto dentro de ABC e sejam D, E, F as projeções de M sobre os lados BC, CA e AB , respectivamente. Prove que:

$$(i) \frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} \geq \frac{6\sqrt{3}}{a},$$

$$(ii) \frac{1}{MD+ME} + \frac{1}{ME+MF} + \frac{1}{MF+MD} \geq \frac{3\sqrt{3}}{a}.$$

8 – Seja ABC um triângulo com alturas AD, BE, CF e H o ortocentro. Prove que

$$(i) \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9 ,$$

$$(ii) \frac{HD}{HA} + \frac{HE}{HB} + \frac{HF}{HC} \geq \frac{3}{2} .$$

9 (IMOSL – 1997) – Os comprimentos dos lados do hexágono convexo ABCDEF satisfazem $AB = BC$, $CD = DE$ e $EF = FA$. Prove que

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2} .$$

10 – Através de um ponto O dentro de um triângulo de área S, três linhas são traçadas de modo que cada lado intercepta duas delas. Estas linhas dividem o triângulo em 3 triângulos com vértice comum O e áreas S_1 , S_2 e S_3 , e 3 quadriláteros. Prove que

$$(i) \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{9}{S} ,$$

$$(ii) \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{18}{S} .$$

(3) $a + b + c = 2p$

$$a.b.c = 4.R.S = 4.R.p.r$$

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2r^2 \Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = pr^2$$

$$\Rightarrow p^3 - (a+b+c).p^2 + (ab+ac+bc).p - abc = pr^2$$

$$\Rightarrow p^3 - (2p).p^2 + (ab+ac+bc).p - 4.R.p.r = pr^2$$

$$\Rightarrow ab+ac+bc = p^2 + r^2 + 4Rr$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = (2p)^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+ac+bc) + 3abc =$$

$$= (2p)^3 - 3(2p)(p^2 + r^2 + 4Rr) + 3.4.R.p.r = 2(p^3 - 3pr^2 - 6Rpr)$$

11 – Se A, B e C são os ângulos do triângulo ABC, prove que

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) = \frac{r}{R} + 1 \leq \frac{3}{2} .$$

12 (IMO – 1991) – Seja ABC um triângulo onde I é o incentro e L, M, N são as interseções das bissetrizes internas de A, B, C com os BC, CA, AB, respectivamente. Prove que

$$\frac{1}{4} < \frac{AI}{AL} \cdot \frac{BI}{BM} \cdot \frac{CI}{CN} \leq \frac{8}{27} .$$

13 (China) – Considere dois círculos concêntricos de raios R e R_1 ($R_1 > R$) e um quadrilátero convexo inscrito no menor círculo. As extensões de AB, BC, CD e DA interceptam o círculo maior em C_1 , D_1 , A_1 e B_1 , respectivamente. Mostre que

$$\frac{\text{perímetro}(A_1B_1C_1D_1)}{\text{perímetro}(ABCD)} \geq \frac{R_1}{R} .$$

14 (IMO – 1981) – Seja P um ponto dentro do triângulo ABC . Sejam D, E, F os pés das perpendiculares de P para as retas BC, CA, AB , respectivamente. Encontre o ponto P que minimiza $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$.

15 – Seja P um ponto dentro do triângulo ABC . Para qual ponto P a soma $PA^2 + PB^2 + PC^2$ é mínima?

16 (IMO – 1961) – Sejam a, b e c os lados de um triângulo e seja S a área deste triângulo. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S.$$