

# Equações funcionais

## Equação de Cauchy e o truque da Romênia

Bernardo P. Trevizan

### 1 Lemas e definições

**Definição 1.1.** (Equação de Cauchy)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . Se o domínio de  $f$  for  $\mathbb{Q}$ , não é complicado resolver a equação. Vamos estudar o que acontece se o domínio for um intervalo que contém o 0 ou com uma das extremidades no 0 (o que inclui  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $\mathbb{R}_{> 0}$ ).

**Lema 1.2.** Cauchy implica  $f(x) = cx$  se  $f$  satisfaz alguma das seguintes propriedades em algum intervalo: contínua, crescente, decrescente, limitada.

**Lema 1.3.** Se uma solução de Cauchy não é linear, então seu gráfico é denso no plano. Ou seja, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a$  no domínio e para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $x$  tal que  $|x - a| < \epsilon$  e  $|f(x) - b| < \epsilon$ .

**Lema 1.4.** As equações a seguir são equivalentes a Cauchy:

- $f : \mathbb{R}_{> 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(xy) = f(x) + f(y)$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ ,  $f(x+y) = f(x)f(y)$
- $f : \mathbb{R}_{> 0} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ ,  $f(xy) = f(x)f(y)$

**Lema 1.5.** (Lema da Romênia) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $f(x+1) = f(x) + 1$  e  $f(x^2) = f(x)^2$ , então  $f(x) = x$ .

### 2 Problemas

**Problema 2.1** Ache todas as funções contínuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$f(f(x+y)) = f(x) + f(y)$$

**Problema 2.2** Determine todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

para todos os pares de reais  $x$  e  $y$ .

**Problema 2.3** Ache todas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que, para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \text{ e } f(x^{2013}) = f(x)^{2013}$$

**Problema 2.4** Ache todas as funções  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  tais que

$$f(x^2 + y) = (f(x))^2 + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}^*$  com  $-x^2 \neq y$ .

**Problema 2.5** Determine todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que, para quaisquer reais  $x$  e  $y$ ,

$$f(x^2y - y) = f(x)^2f(y) + f(x)^2 - 1.$$