Esse Problema é de Teoria dos Números? SIIIIU!!!

Prof. Davi Lopes

28ª Semana Olímpica - 30/01/2025

1. Peraí... Esses Problemas Não São de Álgebra

Problema 1 (OBM/2024): Esmeralda escolhe dois inteiros positivos distintos a e b,com $b > a$, e escreve a equação $x^2 - ax + b = 0$ no quadro. Se a equação possui raízes inteiras positivas distintas c e d, com $d > c$, ela escreve a equação $x^2 - cx + d = 0$ no quadro. Ela repete o procedimento enquanto obtiver raízes inteiras positivas distintas. Caso ela escreva uma equação na qual isso não ocorre, ela para.

(a) Mostre que Esmeralda pode escolher a e b de modo que ela vá escrever exatamente 2024 equações no quadro.

(b) Qual é a maior quantidade de equações que ela pode escrever sabendo que um dos números escolhidos inicialmente é 2024?

Problema 2: Prove que para qualquer inteiro positivo *n*, o número

$$S_n = \binom{2n+1}{0}.2^{2n} + \binom{2n+1}{2}.2^{2n-2}.3 + \binom{2n+1}{4}.2^{2n-4}.3^2 + \dots + \binom{2n+1}{2n}.3^n$$

é a soma de dois quadrados perfeitos consecutivos.

Problema 3: Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tais que $f\left(f(n)\right) = 2n + 1$,

Problema 4: Para cada $n \in \mathbb{N}$, ache o maior $k \in \mathbb{N}$ tal que 2^k divide $\left\lfloor \left(3 + \sqrt{11}\right)^{2n-1} \right\rfloor$.

Problema 5 (IMO Shortlist/2021): Para quais inteiros positivos n a equação

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{ij}{n+1} \right\rfloor = \frac{n^2(n-1)}{4}$$

é verdadeira?

Problema 6 (EGMO/2022): Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

(i) $f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$;

(ii) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, ao menos dois dos números $f(a)$, $f(b)$ e $f(a+b)$ são iguais.

Problema 7 (EGMO/2022): Uma sequência infinita de inteiros positivos $a_1, a_2, \dots$ é dita *boa* se a_1 é um quadrado perfeito e, para todo $n \geq 2$, a_n é o menor inteiro positivo tal que

$$na_1 + (n-1)\,a_2 + (n-2)\,a_3 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

é um quadrado perfeito. Prove que, para toda sequência boa $a_1, a_2, \dots$, existe um inteiro positivo k tal que $a_n = a_k$, para todos os inteiros $n \geq k$.

Problema 8 (OMpD/2024): Seja a_0,a_1,a_2,... uma sequência infinita de inteiros positivos com as seguintes propriedades:

- a_0 é um inteiro positivo dado;
- Para cada $n \geq 1$ inteiro, a_n é o menor inteiro maior do que a_{n-1} de tal modo que $a_n + a_{n-1}$ é um quadrado perfeito.

Por exemplo, se $a_0 = 3$, então $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$ e assim por diante.

(a) Seja T o conjunto dos números da forma $a_k - a_l$, com $k \geq l \geq 0$ inteiros. Demonstre que, independentemente do valor de a_0, o número de inteiros positivos que não estão em T é finito.

(b) Calcule, em função de a_0, a quantidade de inteiros positivos que não estão em T.

2. Eu Jurava Que Isso Era Combinatória...

Problema 9 (Teste EGMO/2024): Sejam m e n inteiros positivos. Kellem e Carmen jogam o seguinte jogo: inicialmente, o número 0 está escrito no quadro. Começando por Kellem e, de maneira alternada, elas somam uma potência de m ao número escrito no quadro, de modo que o novo número escrito no quadro não exceda n. Quem escrever n vence o jogo. Determine, para cada par (m,n), quem tem a estratégia vencedora.

Observação: as potências de m são números da forma m^k, com k inteiro não negativo.

Problema 10 (EGMO/2023): É dado um inteiro positivo $s \geq 2$. Para cada inteiro positivo inteiro k, definimos o twist k' de k como segue: escreva escreva k como $as + b$, onde a e b são inteiros não negativos com $b < s$; então $k' = bs + a$. Para o inteiro positivo n, considere a sequência infinita d_1,d_2,... , onde $d_1 = n$ e d_{i+1} é o twist de d_i, para cada inteiro positivo i.

Prove que esta sequência contem 1 se, e somente se, o resto quando n é dividido por $s^2 - 1$ é igual a 1 ou s.

Problema 11 (IMO Shortlist/2021): Seja $n \geq 3$ um inteiro fixo. Há $m \geq n + 1$ contas em um colar circular. Você deseja pintar as contas usando n cores, de modo que entre quaisquer $n + 1$ contas consecutivas cada cor apareça pelo menos uma vez. Encontre o maior valor de m para o qual essa tarefa *não* seja possível.

Problema 12 (IMO Shortlist/2007): Determine todos os inteiros positivos n para os quais os números no conjunto $S = \{1,2,...,n\}$ podem ser coloridos de vermelho e azul, com a seguinte condição: o conjunto $S \times S \times S$ contém exatamente 2007 triplas ordenadas (x,y,z) tais que x,y,z são da mesma cor e $x + y + z$ é divisível por n.

Problema 13 (IMO Shortlist/2019): A sequência infinita a_0,a_1,a_2,... de inteiros (não necessariamente distintos) satisfaz $0 \leq a_i \leq i$, para todo $i \geq 0$, e, para todo $k \geq 0$ inteiro,

$$\binom{k}{a_0} + \binom{k}{a_1} + \cdots + \binom{k}{a_k} = 2^k$$

Prove que todos os inteiros $N \geq 0$ aparecem ao menos uma vez nessa sequência.

Problema 14 (IMO Shortlist/2021): Determine todos os inteiros positivos n com a seguinte propriedade: os k divisores positivos de n possuem uma permutação $(d_1,...,d_k)$ tal que, para $i = 1, ..., k$, o número $d_1 + ... + d_i$ é um quadrado perfeito.

Problema 15 (OBM/2020): Consideremos uma sucessão infinita $x_1,x_2,...$ de números inteiros positivos tais que, para todo inteiro $n \geq 1$:

- Se x_n é par, então $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$;
- Se x_n é ímpar, então $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{2} + 2^{k-1}$, onde k é um inteiro positivo tal que $2^{k-1} \leq x_n < 2^k$.

Determine o menor valor possível de x_1 para o qual a sucessão contenha algum termo igual a 2020.

Problema 16 (OMpD/2021): Branca de Neve possui, em seu enorme cesto, 2021 maçãs, e ela sabe que exatamente uma delas possui um veneno mortal, capaz de matar um ser humano horas após ingerir apenas um mísero pedaço. Ao contrário do que diz os contos de fadas, Branca de Neve é mais malévola do que a Rainha Má, e não se importa com a vida dos sete anões. Por isso, ela decidiu usá-los para descobrir qual maçã é envenenada. Para tanto, no começo de cada dia, Branca de Neve prepara algumas saladas de maçã (cada salada é a mistura de pedaços de algumas maçãs escolhidas por ela), e obriga alguns dos anões (possivelmente todos) a comer uma salada cada um. No fim do dia, ela observa quem morreu e quem sobreviveu, e no dia seguinte ela novamente prepara algumas saladas de maçã, obrigando alguns dos anões sobreviventes (possivelmente todos) a comer uma salada cada um. E ela continua a fazer isso, dia após dia, até descobrir a maçã envenenada ou até que todos os anões morram.

Qual é o número mínimo de dias que Branca de Neve necessita para descobrir a maçã envenenada, independentemente da sorte que ela tenha?

3. Geometria? TN? Nem Sei Mais a Diferença!

Problema 17 (Rioplatense/2017): Temos um triângulo equilátero T de lado ℓ, sendo ℓ um real positivo. Dividimos T em 23 triângulos equiláteros. Cada um desses triângulos tem seus lados paralelos aos lados de T, sendo que 16 deles tem lado 1, 6 tem lado 2 e o último tem lado a, com $a \neq 1, 2$. Determine todos os valores possíveis de ℓ e a.

Problema 18 (OBM/2004): Determine todos os valores de n tais que é possível dividir um triângulo em n triângulos, de modo que não haja 3 vértices alinhados e em cada vértice incide o mesmo número de segmentos.

Problema 19 (OBMU/2016): Uma bola de futebol é usualmente obtida a partir de uma figura poliédrica que possui faces de dois tipos, hexágonos e pentágonos, e em cada vértice incidem três faces, sendo dois hexágonos e um pentágono. Diremos que um poliedro convexo é futebolístico, se é semelhante à bola de futebol no seguinte sentido: possui as faces sendo m-ágonos ou n-ágonos (com $m \neq n$) e em cada vértice incidem três faces, sendo dois m-ágonos e um n-ágono.

(a) Prove que m deve ser par (b) Encontre todos os poliedros futebolísticos.

Problema 20 (IMO Shortlist/2008): No plano de coordenadas, considere o conjunto S de todos os pontos com coordenadas inteiras. Para um inteiro positivo k, dois pontos distintos $A, B \in S$ serão chamados de $k-$amigos se houver um ponto $C \in S$ tal que a área do triângulo ABC seja igual a k. Um conjunto $T \subset S$ é $k-$clique se quaisquer dois pontos em T forem $k-$ amigos. Encontre o menor inteiro positivo k para o qual existe um $k-$ clique com mais de 200 elementos.

Problema 21 (OBM/2015):Seja ABC um triângulo e n um inteiro positivo. Sobre o lado BC considere os pontos A_1, A_2, ..., A_{2^n-1} que dividem o lado em 2^n partes iguais, ou seja, $BA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{2^n-2}A_{2^n-1} = A_{2^n-1}C$. Defina os pontos B_1, B_2, ..., B_{2^n-1} e C_1, C_2, ..., C_{2^n-1} sobre os lados CA e AB, respectivamente, de maneira análoga. Trace os segmentos AA_1, AA_2, ..., AA_{2^n}, BB_1, BB_2, ..., BB_{2^n} e CC_1, CC_2, ..., CC_{2^n}. Determine, em função de n, em quantas regiões foi dividida a região delimitada pelo triângulo ABC por esses segmentos.

Problema 22 (IMO/2001): Sejam $a > b > c > d$ inteiros positivos e suponha ainda que $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$. Prove que $ab + cd$ não é primo.

4. Algumas Curiosidades

- **(Teorema de Ringel-Youngs):** Dada uma superfície S com característica de Euler χ (isso é um número que meio que descreve a orientação e o número de buracos dela), se dividirmos tal superfície em várias regiões, o número máximo de cores necessárias para colorir cada região com uma cor, de modo que não haja duas regiões adjacentes da mesma cor é:

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor$$

  A exceção é a garrafa de Klein, onde tal máximo é 6.

- ***(Tabuleiros e Incidência em Planos Projetivos):*** Se desejamos pintar as casas de um tabuleiro $n \times n$ $(n \geq 2)$ de modo que não haja 4 casas pintadas que formem as extremidades de um retângulo com lados paralelos ao do tabuleiro, o número de casas pintadas é menor ou igual a $\frac{n\left(1+\sqrt{4n-3}\right)}{2}$. Além disso, usando planos projetivos em corpos finitos, pode-se provar que se $n = p^2 + p + 1$, com p primo, então tal valor é de fato uma cota máxima atingível.

- **(Teorema da Imersão de Massey-Cohen):** Uma variedade diferenciável $n-$dimensional arbitrária (que é, basicamente, uma estrutura geométrica onde você pode "caminhar" em n direções sem encontrar nenhuma mudança abrupta na trajetória) pode ser imersa num espaço euclidiano de dimensão N se, e somente se, $N \geq 2n - s(n)$, onde $s(n)$ é a soma dos algarismos de n na base binária.