Funcional SO N3

Andrey Chen

January 20, 2025

Clássicos

1. (Cauchy)

a) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

b) (*) Repita para $f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. (Lembre que o domínio aqui é definido como $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$.) Conclua que nem toda solução da equação de Cauchy é linear.

c) (**) Encontre uma função não nula $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$

d) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescentes, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. E se f for contínua ao invés de crescente?

e) (*) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y), f(x^2) = f(x)^2$ então f é linear, ou seja, $f(x) = xf(1)$ para todo x.

f) (**) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y), f(x^{2025}) = f(x)^{2025}$ então f é linear.

g) (**) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e suponha que o gráfico $gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ não intersecta o círculo $B(p, r)$ onde $p = (1, 100)$ e $r = 0.00001$. Mostre que necessariamente f é linear. (Os valores de p e r não importam!)

h) (*) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)+f(y), f(1/x) = 1/f(x)$ então f é linear. (Há duas soluções para esse item; tente fazer com e sem o item anterior!)

i) (*) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)+f(y), f(x) = x^2 f(1/x)$ então f é linear.

2. (Adjacentes a Cauchy)

a) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ contínuas.

b) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ contínuas.

c) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(xy) = f(x)f(y)$ contínuas.

d) (Jensen) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ crescentes.

e) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescentes, tais que para todo x, y temos que $f(x) + f(x + 3y) = f(x + y) + f(x + 2y)$

f) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$, $f(\sqrt{xy}) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$ crescentes.

g) (*) (Restrições adicionais) Encontre todas as $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $a < 1 < b$ inteiros valha que $f(a + b^{2025}) = f(a) + f(b^{2025})$.

h) (**) (SL IMO 1979) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a identidade $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$ para todos x, y. Mostre que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos x, y.

i) (*) (Taiwan) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(f(x+y)) = f(x)+f(y)$ crescentes.

j) (**) (Cauchy misto) Fixado $\alpha \neq 0$, encontre todas as funções tais que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x + y) - f(x) - f(y) = \alpha(f(xy) - f(x)f(y))$.

k) (**) (Funções trigonométricas) Encontre todos os pares de funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitadas satisfazendo $\begin{cases} f(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y) \end{cases}$ para todos x, y.

l) (**) (Quatro Quadrados) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f(x) + f(y))(f(z) + f(w)) = f(xz + yw) + f(xw - yz)$

m) (***) (Aczél, 1987) Encontre todas as funções crescentes $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que se $u(x) - u(y) = u(z) - (w)$ então $u(kx) - u(ky) = u(kz) - u(kw)$.

3. (*) (Bizú da RMM) Encontre todas as $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$, $f(x + 1) = f(x) + 1$, $f(x^2) = f(x)^2$ e tais que f é crescente.

4. (Independência de variáveis)

a) (*) Encontre todas as quádruplas de funções $f, g, h, j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x)g(y) = h(x)j(y)$ para quaisquer x, y.

b) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $yf(x) - xf(y) = xy(x^2 - y^2)$

5. **a)** (*) Mostre que não existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo $f(f(n)) = n + 1$ para todo n.

b) (*) (IMO 1987) Mostre que não existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(f(n)) = n+1987$.

c) (*) Fixado um inteiro par k, resolva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(f(n)) = n + k$.

Pontos Fixos

6. (Iteradas de função crescente)

a) (*) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Suponha que, para algum $z \in \mathbb{R}$ e algum $k \in \mathbb{N}$ tenhamos $f(f \dots f(z)) = z$, onde f aparece k vezes. Mostre que $f(z) = z$.

b) (*) (Vingança 2023 - simplificado) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente com $f(0) = 0$. Suponha que, para todos x, y existe um $n < 2023$ tal que $f^n(x) + f^n(y) = x + y$. Mostre que $f(x) = x$ para todo x. (O problema original troca $f(0) = 0$ e crescente por contínua, o que força o uso do TVI)

7. (Iteradas de polinômios inteiros)

a) (*) Seja $P \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio de coeficientes inteiros. Suponha que, para algum $x \in \mathbb{Z}$ e algum $k \in \mathbb{N}^*$ tenhamos $P(P \dots P(x)) = x$, onde P aparece k vezes. Mostre que $P(P(x)) = x$.

b) (*) (IMO 2006) Seja $P \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio de coeficientes inteiros e grau $n > 1$. Fixado um $k \in \mathbb{N}$, mostre que o número de raízes de $P(P \dots P(x)) = x$, onde P aparece k vezes, é no máximo n.

8. (*) Mostre que não existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = x^2 - 2$ para todo x.

9. **a)** (*) Sejam $F : X \to Y$ e $G : Y \to X$ duas funções. Prove que o número de pontos fixos $F(G(x)) = x$ é igual ao número de pontos fixos $G(F(y)) = y$. (Esse número pode ser infinito!)

b) (*) Mostre que não existem funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = x^{2025}$ e $g(f(x)) = x^{420}$.

c) (**) Encontre funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e crescentes tais que $f(g(x)) = x^3, g(f(x)) = x^5$.

10. (**) (IMO 1996) Encontre todas as soluções de $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$.

Injetividade e Sobrejetividade

11. **a)** (*) (IMO 1992) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$.

b) (*) (Suíça 2004) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$.

12. (**) (IMO 1986 - generalizado) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ que satisfazem, para todo $x, y \geq 0$, a identidade $f(x + y) = f(x)f(yf(x))$.

13. (***) (IMO 1999 - generalizado) Fixada uma constante $C \in \mathbb{R}$, encontre todas as soluções da equação funcional $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)) + C$. (No problema original, $C = -1$.)

14. (**) (IMO 2012) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, para quaisquer inteiros a, b, c, com $a + b + c = 0$, valha $f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(a)f(c) + 2f(b)f(c)$

15. (**) (IMO 2009) Encontre todas as funções $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tais que, para quaisquer inteiros a, b, os três inteiros $a, f(b), f(b + f(a) - 1)$ sempre são lados de um triângulo não degenerado.

Manipulações Algébricas

16. (*) (Vandermonde) Encontre todas as $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo a identidade $f(0)^3 + f(1)^3 + f(2)^3 + \ldots f(n)^3 = (f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n))^2$ para todo $n \geq 0$

17. (*) (USAMO 2002) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$. (Tente resolver esse exercício sem usar nenhum resultado do problema 1!)

18. (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x^2 + y) = f(x^{2025} + 2y) + f(x^4)$

19. (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x^2 + y) = f(f(x) - y) + 4yf(x)$.

20. (**) (IMO 2017) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos x, y, $f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$.

21. (**) (USAMO 2023) Encontre todas as $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ que satisfazem $f(xy + f(x)) = xf(y) + 2$.

22. **a)** (**) (ELMO 2014) Encontre todas as triplas de funções injetivas (f, g, h) todas de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, satisfazendo para quaisquer x, y reais:
$$\begin{cases} f(x + f(y)) = g(x) + h(y) \\ g(x + g(y)) = h(x) + f(y) \\ h(x + h(y)) = f(x) + g(y) \end{cases}$$

b) (**) Repita o problema anterior assumindo sobrejetividade no lugar de injetividade.

c) (**) Encontre uma tripla de funções não constantes (e não injetivas) cuja imagem está contida nos inteiros.

d) (**) (SL IMO 2022) Encontre todos os racionais q tais que existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x + f(y)) = f(x) + f(y)$ e tal que $f(z) \neq qz$, para todos x, y, z.

Equações nos Inteiros e Sequências

23. **a)** (*) (IMO 2010) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$

b) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x\lfloor y \rfloor) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$

24. (*) Fixado um inteiro $k \geq 1$, encontre todas as sequências não-decrescentes de inteiros a_n satisfazendo $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} = n + 1$ para todo n inteiro.

25. (*) (Divisibilidade e grau)

a) (*) Suponha que P é um polinômio de coeficientes inteiros tal que $P(n)|P(2n)$ para infinitos n. Prove que P é mônico. (Problema bônus: resolver $mdc(P(x), P(y)) = P(mdc(x, y)))$

b) (**) Encontre todos os polinômios P de coeficientes reais tais que $P(x^2) = P(x)P(x + 1)$.

c) (**) Encontre todos os polinômios P de coeficientes inteiros tais que $P(n^2 - m^2)|P(n^4 - m^4)$ e $P(n^2 + m^2)|P(n^4 - m^4)$ para todos m, n.

d) (*) (IMC 2023) Encontre todos os polinômios $P \in \mathbb{R}[x, y]$ de coeficientes reais tais que $P(x, y)P(z, t) = P(xz - yt, xt + yz)$ para todos m, n.

e) (*) (ELMO) Encontre todos os polinômios P de coeficientes inteiros tais que $n|P(2^n)$ para todo n.

26. (*) Encontre todas as $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ satisfazendo $m^2 + f(n)|mf(m) + n$.

27. (*) (Funções Multiplicativas) Uma função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ é dita *multiplicativa* se $f(mn) = f(m)f(n)$ sempre que $mdc(m, n) = 1$ e *totalmente multiplicativa* se $f(mn) = f(m)f(n)$ sempre.

a) (*) Mostre que se f é totalmente multiplicativa e estritamente monótona, então $f(n) = n^\alpha$ para todo n. (α é constante e não precisa ser racional.)

b) (**) Mostre que se f é multiplicativa e estritamente monótona, então $f(n) = n^\alpha$ para todo n.

c) (*) Mostre que se f é multiplicativa, então $F(n) := \sum_{d|n} f(d)$ também é multiplicativa.

d) (**) (Fórmula da Inversão de Mobius) Seja μ a função de Mobius, isto é, a única função multiplicativa que satisfaz $\mu(p) = -1$, $\mu(p^k) = 0$ para todo primo p e todo expoente $k \geq 2$. Mostre que, se definimos $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ então $f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu(\frac{n}{d})$

e) Encontre todas as funções $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tais que $\sum_{d|n} f(d) = n$. (Tente resolver sem usar o item anterior!)

28. (IMO 2009) (***) Suponha que uma sequência s_n de inteiros positivos é estritamente crescente, e é tal que s_{s_n} e s_{1+s_n} são ambas progressões aritméticas. Mostre que s_n é progressão aritmética.

Equações com Ideias Geométricas

29. (*) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|f(x) - f(y)| < 1000|x - y|^2$ para todo x, y então f é constante.

30. (Transformações regulares no plano)

a) (*) Encontre todas as $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preservam distâncias, isto é, $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$.

b) (***) Mostre que se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $d(P, Q) = 1 \Leftrightarrow d(f(P), f(Q)) = 1$ então f preserva distâncias. (Desafio: tente fazer esse e o o item **e)** com $\Rightarrow$ no lugar de $\Leftrightarrow$)

c) (**) Encontre todas as $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetivas tais que P, Q, R são colineares se, e somente se, $f(P), f(Q), f(R)$ são colineares.

d) (**) Encontre todas as $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetivas tais que A, B, C formam triângulo não degenerado com D em seu interior se, e somente se, $f(A), f(B), f(C)$ formam triângulo não degenerado com $f(D)$ em seu interior. (Em outras palavras, f preserva ”convexidade” ou interiores de triângulos.)

e) (***) Seja $[A, B, C]$ a área do triângulo ABC. Encontre todas as $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $[P, Q, R] = 1 \Leftrightarrow [f(P), f(Q), f(R)] = 1$.

31. (**) Seja $\mathcal{L}$ o conjunto de retas em $\mathbb{R}^2$. Mostre que não existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}$ tal que se A, B, C são colineares então $f(A), f(B), f(C)$ são simultaneamente paralelas ou simultaneamente concorrentes.

32. **a)** (**) Mostre que não existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $d(f(x), f(y)) \geq |x - y|$.

b) (**) Mostre que não existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $d(f(x), f(y)) \geq |x - y|$.

Miscelâneos

33. (*) Encontre todas as $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que $f\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

34. (RELMO 2022)

a) (**) Mostre que, para todo $b > 0$ inteiro, não existe nenhuma solução para a equação funcional $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f^{f(n)}(n) = n + b$

b) (*) Mostre que, para quaisquer $a > 1, b > 0$ inteiros, existe uma solução para a equação funcional $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f^{f(n)}(n) = an + b$

35. (Simetria da hipérbole)

a) (*) Considere uma hipérbole $y = \frac{k}{x}$, e uma corda AB no quadrante positivo. A reta AB intersecta os eixos x e y em X e Y, respectivamente. Prove que $AX = BY$.

b) (*) Encontre todas as funções contínuas f tais que o gráfico satisfaz a propriedade do item a).

c) (*) É dada uma hipérbole no plano; explique como construir com régua e compasso os dois eixos dela.

36. (Estabilidade de Hyers-Ulam)

a) (***) Seja $\varepsilon > 0$ fixo e suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função crescente tal que $|g(x + y) - g(x) - g(y)| < \varepsilon$ para quaisquer x, y. Mostre que existe uma constante C, independente de g, tal que para alguma função linear αx valha a desigualdade $|g(x) - \alpha x| < C\varepsilon$. (Dizemos que a equação de Cauchy é *estável*, pois quase soluções estão sempre próximas de soluções de verdade.)

b) (?) (Vingança da Vingança Olímpica) Seja $N > 0$ fixo e suponha que $g : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ é uma função tal que $d(g(x + y), g(x) + g(y)) < N$ para quaisquer x, y. (Lembre que $F_p = \{0, 1, \ldots p - 1\}$ com a soma e multiplicação sempre módulo p, e p é primo.) Mostre que existe uma constante C, independente de p e g, tal que para alguma função linear kx valha a desigualdade $|g(x) - kx| < CN$.

37. (Filtragem e o problema do Gugu)

a) (**) Mostre que não existe $\lim_{n\to\infty} cos(n^3 - n + 6)$. (O limite é sobre os inteiros!)

b) (**) Considere um polinômio $P(x)$ de grau exatamente d. Mostre que existem $d + 1$ funções periódicas $f_1, f_2, \ldots f_{d+1}$ (períodos distintos e não necessariamente contínuas) tais que $P(x) = f_1(x) + \ldots + f_{d+1}(x)$. Mostre que não é possível fazer com menos de $d + 1$ funções. Mostre que não é possível fazer o mesmo se $P(x)$ for substituído por e^x.

c) (***) Sejam a, b, c reais positivos tais que, para todo $n \geq N_0$, a expressão $a \cdot 4^n + b \cdot 6^n + c \cdot 9^n$ é um quadrado perfeito. Mostre que existem racionais x, y tais que $a = x^2, b = 2xy, c = y^2$. (Dica: aproxime a raiz da expressão usando série de Taylor, depois filtre)

d) (***) (Gugu) Sejam $a, b > 1$ inteiros tais que, para todo n suficientemente grande, $a^n - 1 | b^n - 1$. Mostre que, para algum k, $b = a^k$.

e) (***) Sejam $a, b > 1$ inteiros tais que, para todo n suficientemente grande, $(a^n - 1)(b^n - 1)$ é um quadrado perfeito. Mostre que $a = b$.