

Geometria Projetiva

Luíze D'Urso

29 de janeiro de 2025

1 Razão Cruzada

Definição 1. *Sejam A, B, C e D pontos colineares. Sua razão cruzada é definida como*

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}.$$

Lema 1. *Sejam A, B, C e D pontos colineares e O um ponto não colinear aos anteriores. Então a razão cruzada $(A, B; C, D)$ é dada por*

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{\sin(\angle AOC)}{\sin(\angle AOD)} : \frac{\sin(\angle BOC)}{\sin(\angle BOD)}.$$

Definição 2. *Sejam a, b, c e d retas concorrentes. Sua razão cruzada é definida como*

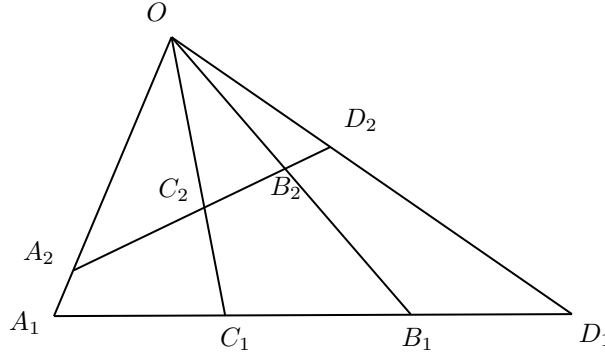
$$(a, b; c, d) = \frac{\sin(\angle ac)}{\sin(\angle ad)} : \frac{\sin(\angle bc)}{\sin(\angle bd)}.$$

Consequências do Lema:

Corolário 1. *Sejam A, B, C e D pontos colineares e O um ponto não colinear aos anteriores. Se $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $c = \overline{OC}$, $d = \overline{OD}$, então*

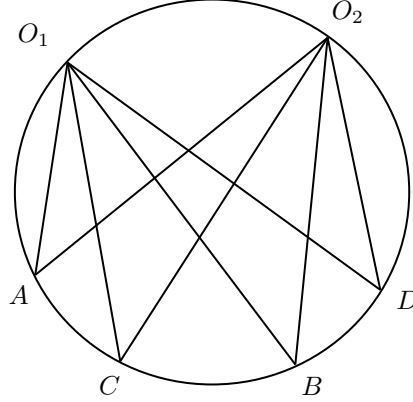
$$(A, B; C, D) = (a, b; c, d).$$

Corolário 2. *Sejam A_1, B_1, C_1 e D_1 pontos em uma reta r e A_2, B_2, C_2 e D_2 outros pontos em uma outra reta s , tais que A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 e D_1D_2 concorrem em O . Então $(A_1, B_1; C_1, D_1) = (A_2, B_2; C_2, D_2)$.*



Corolário 3. *Sejam A, B, C, D, O_1 e O_2 pontos em um círculo. Então*

$$(O_1A, O_1B; O_1C, O_1D) = (O_2A, O_2B; O_2C, O_2D).$$



Definição 3. *Sejam A, B, C e D pontos em um círculo. Sua razão cruzada é definida como*

$$(A, B; C, D) = \frac{\sin(\widehat{AC}/2)}{\sin(\widehat{AB}/2)} : \frac{\sin(\widehat{BC}/2)}{\sin(\widehat{BD}/2)}.$$

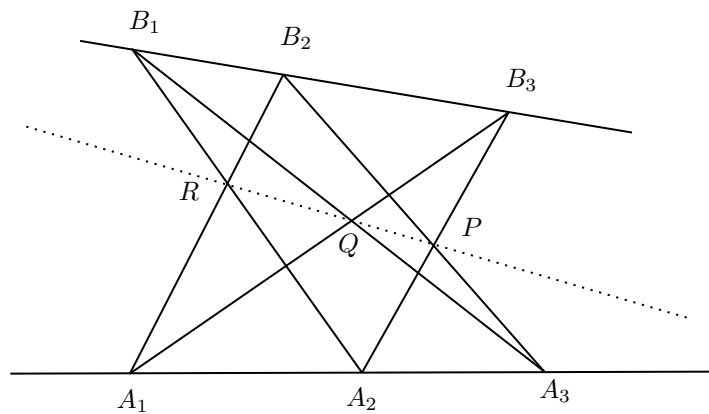
2 Teoremas

Teorema 1 (Teorema da Borboleta). *Seja XY uma corda em uma circunferência e M o seu ponto médio. Sejam AB e CD outras duas cordas da mesma circunferência passando por M . Sejam P e Q as interseções de AC e BD com XY . Então M é ponto médio de PQ .*

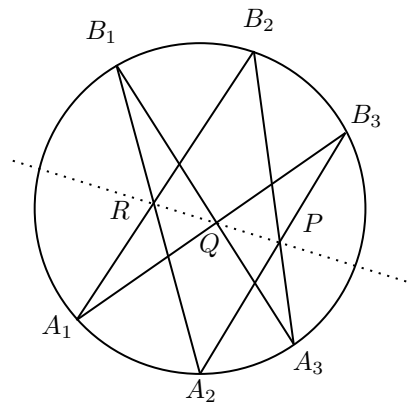
Teorema 2 (Teorema de Desargues). *Sejam 6 pontos distintos A, B, C, A', B' e C' do plano projetivo tais que as retas AA' , BB' e CC' são concorrentes. Então os 3 pontos de interseção $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$ e $BC \cap B'C'$ são colineares.*

Teorema 3 (O Dual do Teorema da Desargues). *Sejam 6 retas distintas a, b, c, a', b' e c' do plano projetivo tais que os pontos de interseção $a \cap a'$, $b \cap b'$ e $c \cap c'$ são colineares. Então as 3 retas ligando $a \cap b$ com $a' \cap b'$, $a \cap c$ com $a' \cap c'$ e $b \cap c$ com $b' \cap c'$ são concorrentes.*

Teorema 4 (Teorema de Pappus). *Sejam A_1, A_2, A_3 pontos em uma reta r e B_1, B_2, B_3 pontos em uma outra reta s . Sejam $R = A_1B_2 \cap B_1A_2$, $Q = A_1B_3 \cap B_1A_3$ e $P = A_2B_3 \cap B_2A_3$. Então P, Q e R são colineares.*



Teorema 5 (Teorema de Pappal). *Sejam $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ pontos em uma circunferência. Sejam $R = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Q = A_1B_3 \cap A_3B_1$ e $P = A_2B_3 \cap A_3B_2$. Então P, Q e R são colineares.*



3 Pontos e retas polares

Definição 4. *Dados um círculo $\mathcal{C}$ de centro O e um ponto $A \neq O$, a reta polar a A com respeito ao círculo $\mathcal{C}$ é a reta perpendicular a OA passando pela inversão do ponto A com respeito a $\mathcal{C}$.*

Definição 5. *Dados um círculo $\mathcal{C}$ de centro O e uma reta a que não passa por O , o ponto polar a a com respeito ao círculo $\mathcal{C}$ é a inversão com relação a $\mathcal{C}$ do pé da altura de O em a .*

Lema 2. *Sejam $\mathcal{C}$ um círculo, A e B pontos distintos de seu centro. Se a e b são as respectivas retas polares de A e B , então $A \in b$ se e só se $B \in a$.*

Proof. Propriedades básicas de inversão. □

Definição 6. Dizemos que A e B são conjugados com relação a um círculo se um está na polar do outro.

Lema 3. Sejam A e B pontos conjugados com relação a um certo círculo $\mathcal{C}$. Sejam C e D as duas interseções de $\mathcal{C}$ com a reta AB . Então $(A, B; C, D) = -1$.

4 Teoremas

Teorema 6 (Brianchon). Seja $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ um hexágono com um círculo inscrito a ele, ou seja, seus lados são todos tangentes a um mesmo círculo. Então A_1A_4 , A_2A_5 e A_3A_6 são concorrentes.

Teorema 7 (Brokard). Sejam $PQRS$ um quadrilátero inscrito em um círculo de centro O e A, B, C seus pontos diagonais, ou seja $A = PQ \cap RS$, $B = QR \cap SP$, $C = PR \cap QS$. Então O é o ortocentro de ABC .

References

[Luk] Projective geometry. <https://imomath.com/index.cgi?page=projectiveGeometry>.
Accessed: 2025-01-29.