1 Invariantes

O estudo de invariantes é, de fato, muito importante em diversas áreas do conhecimento. A física, por exemplo, é baseada na lei da energia, conservação do momento e entre outras e, com isso, a energia e o momento se tornam invariantes em um sistema físico e deixa mais fácil de se trabalhar com ele. Na matemática olímpica, o estudo de invariantes se faz necessário em diversas áreas, mas com uma ênfase maior na combinatória onde em alguns problemas tentaremos encontrar funções, ou parâmetros que não mudam ou que variam de uma forma monótona e, com isso, conseguir resolver os problemas. O problema a seguir será bastante instrutivo para introduzir a ideia das invariantes.

Problema 1. Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa? Dito isso, vamos introduzir com um exemplo de problema

Sol.: Vamos tentar encontrar alguma invariante. Perceba que uma bem notável é que a quantidade de moedas cara é sempre ímpar. Para ver isso, basta analisar as possíveis mudanças:

$$\begin{cases} (C,C,C,C) & \longrightarrow (K,K,K,K) \\ (C,C,C,K) & \longrightarrow (K,K,K,C) \\ (C,C,K,K) & \longrightarrow (K,K,C,C) \\ (C,K,K,K) & \longrightarrow (K,C,C,C) \\ (K,K,K,K) & \longrightarrow (C,C,C,C) \end{cases}$$

Sempre a paridade é invariante, fazendo com que seja impossível ficar com todas cara, pois isso é o mesmo que ter 0 caras (par) e no início são 7 caras (ímpar).

1.1 Como achar uma invariante?

Perceba que nos dois exemplos temos algo em comum, como o próprio nome sugere, precisamos encontrar uma certa propriedade que se mantém constante quando fazemos alguma operação permitida. O ponto todo é esse, mas para conseguir notar alguma invariância é preciso já ter uma certa bagagem para perceber as sutilezas, mas vou descrever as invariâncias mais comuns:

- Soma dos inversos é constante.

- Soma dos quadrados é constante.

- Alguma certa soma só aumenta ou só diminui (denominado monoinvariância).

- Alguma invariância em relação à algum módulo.

Além disso, as questões de invariância sempre tem uma cara característica, sempre tem uma certa operação ou algumas operações e ele dá uma situação inicial e pergunta se alguma outra configuração é possível ou quais as possibilidades para o final.

2 Problemas propostos

Problema 2. São escritos os números $1, 2, 3, \cdots, 100$ em um quadro. Uma operação consiste em escolher dois números a, b, apaga-los e escrever $\sqrt{a^2 + b^2}$ no quadro. Sabendo que essa operação foi realizada até sobrar um único número. Encontre os possíveis valores para o número que foi escrito .

Problema 3. Temos numa lousa os inteiros de 1 a $4n - 1$, onde n é um natural. Em cada passo devemos substituir dois inteiros pela sua diferença. Prove que um inteiro par restará após $4n - 2$ passos.

Problema 4. Em cada vértice de um quadrado há algumas fichas. Um movimento consiste em escolher um vértice, restirar algumas fichas e depois botar o dobro de fichas retiradas em um vértice ao lado. Se no início há 1, 0, 0, 0 fichas, é possível chegar em 1, 9, 8, 9 fichas após finitos movimentos?

Problema 5. Considere um jogo onde se começa com uma pilha com n moedas. A cada rodada é permitido separar uma pilha com a moedas em duas pilhas com b e c, $b + c = a$ e com isso, anota-se o valor $b \cdot c$ em um quadro. Esse processo se repete até ficarem n pilhas com 1 moeda cada. Encontre todas as possíveis somas dos números anotados.

Problema 6. Pablo escolhe um inteiro positivo n e escreve no quadro negro os 2n + 1 números

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \cdots, \frac{n}{2n+1}$$

Laura escolhe dois números escritos por Pablo, a e b, apaga-os e escreve o número $2ab - a - b + 1$. Depois de repetir este procedimento 2n vezes, sobra apenas um único número. no quadro negro. Determinar os possíveis valores deste número.

Problema 7. (OCM 2001) Cada um dos números $x_1, x_2, ..., x_n$ é igual a 1 ou -1 e

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1 = 0$$

Prove que n é divisível por 4.

Problema 8. (OBM N2 2018) Numa lousa estão escritos inicialmente os números $1, 2, \cdots, 10$. Para quaisquer dois números a e b na lousa chamamos de $S_{a,b}$ a soma de todos os números na lousa com exceção de a e b. Uma operação permitida é escolher dois números a e b na lousa, apagá-los e escrever o número $a + b + \frac{ab}{S_{a,b}}$. Após realizar essa operação algumas vezes restam na lousa apenas dois números x e y, com $x \geq y$.

(a) Quantas operações foram realizadas?

(b) Determine o maior valor possível para x.

Problema 9. Em um tabuleiro 4 × 4 uma das casas do canto está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

Problema 10. (OBM 2022) Um jogo para uma pessoa tem as seguintes regras: inicialmente há dez pilhas de pedras, com $1, 2, 3, \cdots, 10$ pedras, respectivamente. Uma jogada consiste em fazer uma das duas seguintes operações:

(i) escolher duas pilhas, cada uma com pelo menos duas pedras, juntá-las e depois adicionar mais duas pedras a nova pilha;

(ii) escolher uma pilha com pelo menos 4 pedras, tirar duas pedras dela e separá-la em duas pilhas de quantidades de pedras positivas escolhidas pelo jogador.

O jogo continua até não ser mais possível fazer uma operação. Mostre que o número de pilhas com apenas uma pedra ao final do jogo é sempre o mesmo, independentemente de como se realizam as jogadas.

Problema 11. Um total de 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, enquanto todas não estejam em um mesmo quarto, uma pessoa anda para um quarto com um número igual ou maior de pessoas do que o quarto que ocupava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

Problema 12. (CONE SUL 2020) Há uma pilha com 15 fichas em uma mesa. A cada passo, Pedro escolhe uma das pilhas na mesa com $a > 1$ fichas, divide em duas pilhas com $b \geq 1$ e $c \geq 1$ fichas e escreve no quadro o produto abc. Ele continua até ter 15 pilhas com 1 ficha cada. Determine todos os valores possíveis para a soma final dos números escritos no quadro.