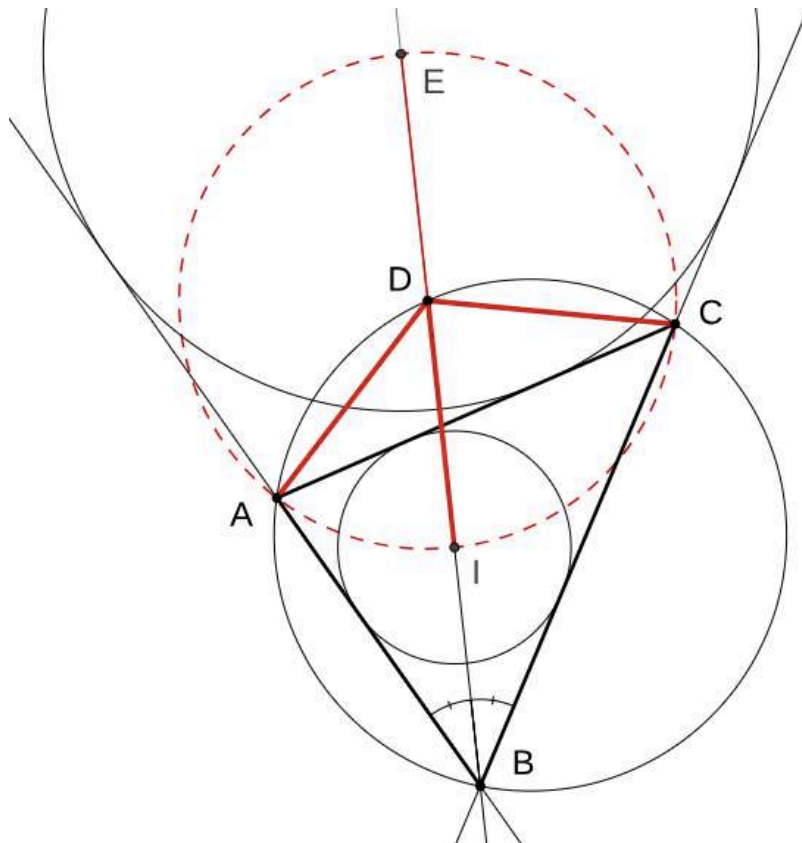


Lema do TRIDENTE

Seja ABC um triângulo qualquer. Seja I o seu incentro e seja D o ponto onde a reta BI (a bissetriz interna de $\angle ABC$) cruza a circunferência circunscrita a ABC . Então, o Lema afirma que D é equidistante de A , C , de I (isto é, dista o mesmo até esses três pontos). Equivalentemente:

- A circunferência que passa por A , C e I tem centro em D . Em particular, isto implica que o centro desta circunferência fica sobre o círculo circunscrito.
- Os três triângulos AID , CID e ACD são isósceles, tendo D como vértice comum aos lados de mesmo comprimento.

Um quarto ponto E , o exincentro de ABC com relação a B , também está à mesma distância de D , diametralmente oposto a I

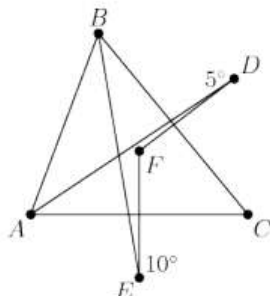


Exemplos:

Problema 1. O triângulo ABC tem incentro I. Considere o triângulo cujos vértices são os circuncentros dos triângulos: IAB, IBC, ICA. Mostre que seu circuncentro coincide com o circuncentro do triângulo ABC.

Problema 2. O círculo inscrito de um triângulo ABC é tangente aos lados AB e AC em D e E respectivamente, e O é o circuncentro do triângulo BCI. Prove que $\angle ODB = \angle OEC$.

Problema 3. No triângulo ABC, a bissetriz do ângulo de $\angle A$ encontra a bissetriz perpendicular de BC no ponto D. A bissetriz do ângulo de $\angle B$ encontra a bissetriz perpendicular de AC no ponto E. Seja F a intersecção das bissetrizes perpendiculares de BC e AC. Encontre DF, dado que $\angle ADF = 5^\circ$, $\angle BEF = 10^\circ$ e $AC = 3$.



Problema 4 (Círculo de nove pontos). Seja ABC um triângulo agudo com ortocentro H. Sejam D, E, F os pés das alturas de A, B, C com os lados opostos. Mostre que o ponto médio de AH está no circuncírculo do triângulo DEF.

Problema 5. Seja ABCD um quadrilátero cíclico e suponha que $BC = CD = 2$. Seja I o incentro do triângulo ABD. Se $AI = 2$, encontre o valor mínimo do comprimento da diagonal BD.

Problema 6. Seja o triângulo ABC satisfaça $2BC = AB + AC$ e tenha incentro I e circuncírculo ω . Seja D a intersecção de AI e ω (com A, D distintos). Prove que I é o ponto médio de AD.

Problema 7. No triângulo ABC, $AB = 3$, $AC = 5$ e $BC = 7$. Seja E a reflexão de A sobre BC e deixe a linha BE encontrar o circuncírculo de ABC novamente em D. Seja I o incentro do triângulo ABD. Calcule $\cos \angle AEI$.

Problema 8. Seja ABXC um quadrilátero cíclico tal que $\angle XAB = \angle XAC$. Seja I o incentro do triângulo ABC e por D o pé de I em BC. Dado $AI = 25$, $ID = 7$ e $BC = 14$, encontre XI