

## 28° SEMANA OLIMPÍCA

SALVADOR-BA

PROFESSOR: MÁRCIO GOMES

### AVALIE, DEPOIS DÊ UM EXEMPLO!

Outro método útil para responder perguntas sobre um valor mínimo ou máximo de algo é avaliar, depois dar um exemplo. Para um máximo, "avaliar" significa "mostrar que o máximo não pode exceder  $M$ ". A segunda parte da prova requer dar um exemplo onde esse valor  $M$  é atingido. A dificuldade geralmente consiste em adivinhar o valor de  $M$ . Muitas vezes nos deparamos com o seguinte dilema: o "melhor"  $M$  para o qual encontramos um exemplo não é o mesmo que o "melhor"  $M$  para o qual temos uma estimativa: há uma lacuna entre os dois números. Devemos tentar melhorar nossa estimativa, talvez usando argumentos diferentes, ou devemos continuar tentando encontrar exemplos melhores? Infelizmente, não há uma solução mágica para esse dilema...

Exemplos:

1. Qual é o número máximo de inteiros positivos distintos cuja soma é 2011?
2. Qual é o número máximo de torres que podem ser posicionadas em um tabuleiro de xadrez de modo que nenhuma torre ataque uma à outra?  
A mesma pergunta para rainhas, bispos, reis e cavalos.
3. Determine o maior número de figuras congruentes  que podem ser colocadas em uma grade  $7 \times 7$  (sem sobreposição) de modo que cada figura cubra exatamente 4 quadrados unitários.
4. Um besouro fica em cada quadrado de um tabuleiro  $9 \times 9$ . A um sinal, cada besouro rasteja diagonalmente para um quadrado vizinho. Pode acontecer que vários besouros se sentem no mesmo quadrado e nenhum nos outros. Encontre o número mínimo possível de quadrados livres.
5. Determine o número máximo de figuras  que podem ser colocadas em uma grade  $6 \times 6$  sem sobreposição.
6. Considere uma fileira de  $2n$  quadrados coloridos alternadamente em preto e branco. Um movimento legal consiste em escolher um conjunto contíguo de quadrados (um ou mais quadrados, mas eles devem estar próximos uns dos outros, não são permitidos espaços) e inverter suas cores. Qual é o número mínimo de movimentos necessários para tornar a fileira inteiramente de uma cor?

7. Considere um tabuleiro  $8 \times 8$ . Qual é o número mínimo de

a) Quadrados  $1 \times 1$ ,

b) Retângulos  $1 \times 2$ , que precisam ser pintados de preto de modo que qualquer quadrado  $2 \times 2$  contenha pelo menos um quadrado  $1 \times 1$  pintado?

8. Considere um tabuleiro de xadrez  $8 \times 8$ . Em alguns dos quadrados unitários, uma diagonal é desenhada de modo que quaisquer duas dessas diagonais não tenham pontos em comum. Qual é o número máximo de diagonais que podem ser desenhadas?

9. Considere um quadrado  $5 \times 5$  dividido em 25 quadrados unitários. Qual é o número máximo de quadrados unitários que podem ser pintados de preto de modo que cada quadrado  $2 \times 2$  contenha no máximo dois quadrados unitários pretos? [Olimpíada de Moscou 1996-7]

10. Se escrevermos os números  $1, 2, \dots, n$  em alguma ordem, obteremos uma cadeia  $n$ . Por exemplo, uma possível cadeia  $11$  é  $3764581121910$ . Qual é o menor  $n$  com  $n > 1$  tal que existe uma cadeia  $n$  que é um palíndromo? (Um número é um palíndromo se puder ser lido da mesma forma em qualquer direção.) [Czech Olympiad, 2012]

11. Cada um dos quadrados unitários de um quadrado  $n \times n$  é colorido com vermelho, amarelo ou verde. Encontre o menor valor de  $n$  tal que, para cada coloração possível, exista uma linha e uma coluna com pelo menos três quadrados unitários da mesma cor (a mesma cor na linha e na coluna).

12. (OBM 2024) Problema 5 Um campeonato é realizado entre seis times de futebol, em que cada um joga com cada um dos outros exatamente uma vez. Em uma partida de futebol, o vencedor ganha três pontos e o perdedor, zero ponto; caso a partida termine empatada, os dois times ganham um ponto. Sabe-se que, no final do campeonato, os seis times tiveram pontuações diferentes. Qual é o menor valor possível da quantidade de pontos do time que fez mais pontos?