

Introdução às Equações Funcionais

Gabriel Torkomian

30 de janeiro de 2025

O objetivo desse material é fazer uma breve introdução às equações funcionais e as principais técnicas que são utilizadas.

1 Equações de Cauchy e Jensen sobre $\mathbb{Q}$

Teorema 1. *Seja $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ uma função tal que*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

Então, $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{Q}$, onde $c \in \mathbb{Q}$ é uma constante qualquer.

Demonstração. Vamos denotar por $P(x, y)$ a equação em (1). Considerando $P(0, 0)$, temos que $f(0) + f(0) = f(0)$ e então, $f(0) = 0$.

Agora, fazendo $P(1, 1) : f(2) = 2f(1)$ e $P(2, 1) : f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1) \dots$ Vamos provar que $f(n) = nf(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por indução!! O caso base já está feito. Suponha então que $\forall k \in \mathbb{N}$ e $k < n$ valha a hipótese. Aí, por $P(n-1, 1)$:

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = (n-1)f(1) + f(1) = nf(1)$$

Perfeito! Já provamos que $f(n) = nf(1)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Observe de $P(x, -x) :$

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x)$$

ou seja, $f(-x) = -f(x)$. Assim, dado $m < 0$, temos que $-m > 0$ e do que já provamos: $f(-m) = -mf(1)$. Disso,

$$-f(m) = f(-m) = -mf(1)$$

Obtendo que $f(n) = nf(1), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Por fim, tome $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ qualquer. Observe que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}\right) \\ &= f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}\right) \\ &= f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right) + \dots + f\left(\frac{p}{q}\right) \\ &= qf\left(\frac{p}{q}\right) \end{aligned}$$

Aí, $pf(1) = f(p) = qf(\frac{p}{q})$. Ou seja, $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$. Veja que provamos que se um função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ satisfaz (1), então f deve ser da forma $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ com $c \in \mathbb{Q}$ (isso pois $f(1) \in \mathbb{Q}$). Mas, observe que não provamos que se f é dessa forma, então f satisfaz (1). Para tal, apenas veja que:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \iff c(x+y) = cx + cy$$

que de fato vale $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Obs. Se f satisfaz (1), dizemos que f é de Cauchy.

Exercício 1. (Jensen) Ache todas as funções $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ uma função tal que

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

Dica. Considere $g(x) := f(x) - f(0)$. Prove que g satisfaz $g(0) = 0$, depois (2) e finalmente conclua que g satisfaz (1) e use o último teorema.

Exemplo 1. (IMO 2019 - P1) Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Solução. Vamos denotar por $P(x, y)$ a equação em (3). Fazendo $P(0, b)$:

$$f(0) + 2f(b) = f(f(b))$$

E, por $P(a, 0)$:

$$f(2a) + 2f(0) = f(f(a)) = 2f(a) + f(0)$$

Agora, vamos usar essas igualdades em (3):

$$(2f(a) - f(0)) + 2f(b) = (2f(a+b) + f(0)) \implies f(a) + f(b) = f(a+b) + f(0)$$

Aí, definindo $g(x) := f(x) - f(0)$, da equação acima temos que $g(x+y) = g(x) + g(y)$ e com um argumento análogo ao que apresentamos no Teorema 1, isso implica que $g(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ com $c \in \mathbb{Z}$. Finalmente, $f(x) = cx + d$ onde $c, d \in \mathbb{Z}$. Basta verificar se essas f de fato funcionam.

Veja que,

$$\begin{aligned} (3) &\iff (c(2a) + d) + 2(cb + d) = f(c(a+b) + d) = c^2(a+b) + cd + d \\ &\iff (c-2)(c(a+b) + d) = 0 \end{aligned}$$

Daí, $c = 2$ ou $c(a+b) + d = 0, \forall a, b \in \mathbb{Z}$. Logo, as únicas soluções são $f(x) = 2x + d$, com $d \in \mathbb{Z}$ e $f = 0$.

2 Algumas ideias

O objetivo nessa seção é dar algumas ideias do que pode ser explorado em uma equação funcional. Os exemplos são simples, aqui é pra você aprender técnicas comumente usadas.

2.1 Cancelamento

Exemplo 2. *Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x^{2024} + y) = f(x^{2025} + 2y) + f(x^2)$$

Solução. Aqui a ideia é forçar o cancelamento de coisas feias... como? Faça que

$$x^{2024} + y = x^{2025} + 2y \iff y = x^{2024} - x^{2025}$$

Daí, de $P(x, x^{2024} - x^{2025})$, temos que $f(x^2) = 0$. Ou seja, pra todo $x \geq 0$, $f(x) = 0$. Para ver que f deve ser identicamente nula, faça $P(x, 0)$:

$$0 = f(x^{2024}) = f(x^{2025})$$

Assim, fazendo $y = z^{\frac{1}{2025}}$, obtemos $f(z) = 0$. (observe que só podemos fazer isso pois $z^{\frac{1}{2025}}$ está bem definido para todo $z \in \mathbb{R}$).

2.2 Tripla iterada de f

Exemplo 3. *Ache todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ estritamente crescentes tais que*

$$f(f(x)) = x + 2$$

para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Solução. Vamos provar que $f(x) = x + 1$ é a única solução. Claramente tal função funciona. Agora, para provar a unicidade a ideia é calcular $f(f(f(x)))$ de duas formas. Note que:

$$f(x + 2) = f(f(f(x))) = f(x) + 2$$

esse é o truque! Aí, $f(x) < f(x + 1) < f(x + 2) = f(x) + 2$ e então $f(x + 1) = f(x) + 1$ e segue por indução que $f(x) = x + f(0)$. Aí é fácil terminar.

2.3 Simetria

Exemplo 4. *Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$xf(x) + y^2 + 2f(f(x)f(y)) = f(x + y)^2 \tag{4}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$

Solução. A única função é $f(x) = x$, que claramente funciona. A ideia é fazer comparar $P(x, y)$ e

$P(y, x)$ e cancelarmos as partes simétricas. As equações ficam respectivamente:

$$\begin{aligned}xf(x) + y^2 + 2f(f(x)f(y)) &= f(x + y)^2 \\yf(y) + x^2 + 2f(f(y)f(x)) &= f(y + x)^2\end{aligned}$$

e subtraindo obtemos $xf(x) - yf(y) = x^2 - y^2$. Ou seja, $xf(x) - x^2 = yf(y) - y^2$. Logo, $xf(x) - x^2$ é constante. Daí, $xf(x) - x^2 = 0$ e então para $x \neq 0$ $f(x) = x$. Fazendo $P(x, -x)$ para $x \neq 0$ segue que $f(0) = 0$ e portanto $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vamos para umas definições rapidinhos que vão ajudar a gente:

Definição 1. Considere $f : X \longrightarrow Y$ uma função qualquer, então:

1. Dizemos que f é injetora se $f(a) = f(b) \implies a = b$, ou seja, não existem dois elementos distintos em X que 'são levados' ao um mesmo elemento de Y por f .
2. Dizemos que f é sobrejetora se $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tal que $f(x) = y$, ou seja, todo elemento em Y é imagem de algum elemento de X por f .
3. Dizemos que f é uma bijeção se for injetora e sobrejetora.

Exercício 2. Seja $k \in \mathbb{R}$. Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(f(x)) = x + k$$

então f é uma bijeção.

Exercício 3. Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tais que

$$f(f(m) + f(n)) = m + n$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$

Exemplo 5. (Ibero 2020 - P5) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(x - y)) + yf(x) = x + y + f(x^2) \quad (5)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$

Solução. Seja $P(x, y)$ a igualdade em (4). De $P(0, 1)$ obtemos que $f(0) = 1$ e $P(1, 1)$ nos dá $f(1) = 2$.
Aí, por $P(1, y)$:

$$f(f(1 - y)) = 3 - y \iff f(f(x)) = x + 2$$

E, pelo último exercício, temos que f é bijetora. Agora, por $P(x, x)$ e $P(x, x - 1)$:

$$f(x) + xf(x) = 2x + f(x^2), \quad f(2x) + xf(x) - f(x) = 2x - 1 + f(x^2)$$

e subtraindo uma da outra, obtemos que $2f(x) - 1 = f(2x)$. Fazendo $x = f(y)$ na equação anterior, obtemos

$$2y + 4 = 2f(f(y)) = f(2f(y)) + 1$$

disso, $f(2f(y)) = 2y + 3 = f(f(2y + 1))$ e aqui usamos a injetividade de f para obter $2f(y) = f(2y + 1)$, aí, $f(2y) + 1 = f(2y + 1)$. Ou seja, $f(x + 1) = f(x) + 1$. Note que $P(-1, y)$ nos dá:

$$f(-f(-1 - y)) = -1 + y + 2 = y + 1 = f(f(y - 1))$$

Como f é injetora, concluímos que $-f(-1 - y) = f(y - 1)$. Podemos reescrever isso da seguinte forma, utilizando :

$$1 - f(-y) = f(y) - 1 \implies 2 = f(y) + f(-y)$$

Considere $P(-x, -2x)$:

$$\begin{aligned} f(-xf(x)) - 2xf(-x) &= -3x + f(x^2) \\ f(-xf(x)) - 2x(2 - f(x)) &= -3x + f(x^2) \\ f(-xf(x)) - 4x + 2xf(x) &= -3x + f(x^2) \\ f(-xf(x)) + 2xf(x) &= x + f(x^2) \end{aligned}$$

Por outro lado, $P(x, 0)$ nos dá:

$$f(xf(x)) = x + f(x^2)$$

Somando as últimas duas equações, obtemos:

$$2 + 2xf(x) = 2x + 2f(x^2) \implies 1 + xf(x) = x + f(x^2)$$

Finalmente, observamos que $P(x, x)$ nos dá:

$$f(x) + xf(x) = 2x + f(x^2)$$

E subtraindo as últimas duas equações, obtemos que $f(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que, de fato, tal f funciona.

2.4 Desigualdade

Vamos agora ver um exemplo que eu particularmente acho muito bonito!

Exemplo 6. *Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x + 1) = f(x) + 1 \quad e \quad f(x^2) = f(x)^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Por indução, temos que $f(x + n) = f(x) + n$ para todo $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$. Também, $f(-x) = \pm f(x)$. Suponha então que $\exists u \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = f(-u)$. Disso, temos que $f(-u + 1) = f(-u) + 1 = f(u) + 1$. Separemos em dois casos:

- Se $f(-u + 1) = f(u - 1)$, então $f(u) + 1 = f(-u + 1) = f(u - 1) = f(u) - 1$, um absurdo.
- Se $f(-u + 1) = -f(u - 1)$, então $f(u) + 1 = f(-u + 1) = -f(u - 1) = -f(u) + 1$ e então $f(u) = 0 = -f(-u)$.

Logo, $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Suponha que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < x$. Considere $a = x - f(x) > 0$ e $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $2a(x+n) - a^2 > 1$. Aí, temos que

$$f((x+n)^2) = (f(x+n))^2 = (x+n-a)^2 = (x+n)^2 - 2a(x+n) + a^2 < (x+n)^2 - 1$$

Assim,

$$f((x+n)^2 - \lfloor (x+n)^2 \rfloor) < (x+n)^2 - \lfloor (x+n)^2 \rfloor - 1 < 0$$

um absurdo pois $f(x^2) = f(x)^2 \implies f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Portanto, $f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$. Disso, $-f(x) = f(-x) \geq -x \implies f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$. E então devemos ter $f(x) = x$, que claramente satisfaz as condições.

Exercício 4. (Ibero 2022 P3) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

- $f(yf(x)) + f(x-1) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.
- $|f(x)| < 2022$ para todo $0 < x < 1$.

2.5 Linearidade

Sabemos que três pontos no plano cartesiano (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ são colineares se

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Assim, para mostrar que uma função f é linear as vezes é interessante tentar mostrar que $(x, f(x)), (y, f(y))$ e $(z, f(z))$ são colineares. Ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff xf(y) + zf(x) + yf(z) = zf(y) + xf(z) + yf(x)$$

Exemplo 7. (USAMO 2023 P2) Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tais que

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + 2 \tag{6}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Solução. Vamos começar provando que f é injetora. De fato, se $f(x_0) = f(y_0)$, fazendo $P(x_0, y_0)$ e $P(y_0, x_0)$ temos

$$x_0f(y_0) + 2 = f(x_0y_0 + f(x_0)) = f(x_0y_0 + f(y_0)) = y_0f(x_0) + 2 \implies x_0 = y_0$$

Para forçar uma simetria, faça $P(f(x), y)$:

$$f(f(x)y + f(f(x))) = f(x)f(y) + 2$$

Dáí,

$$f(f(x)y + f(f(x))) = f(f(y)x + f(f(y))) \implies f(x)y + f(f(x)) = f(y)x + f(f(y))$$

Aí, (olha a mágica kkk)

$$f(x)y + f(f(x)) = f(y)x + f(f(y))$$

$$f(y)z + f(f(y)) = f(z)y + f(f(z))$$

$$f(z)x + f(f(z)) = f(x)z + f(f(x))$$

e somando tudo obtemos $xf(y) + zf(x) + yf(z) = zf(y) + xf(z) + yf(x)$. Logo, $f(x) = Ax + B$ e substituindo em (6) facilmente verificamos que a única possibilidade é termos $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$

2.6 Divisibilidade

Aqui vai um disclaimer IMPORTANTE: Esse material não contém todas as técnicas tradicionais para resolver uma equação funcional. Seria muito pretensioso da minha parte fazer uma aula que cobrisse tudo. Vamos ver esse exemplo simples para mostrar que existem FE's que são uma mistura de álgebra e teoria dos números.

Exercício 5. (APMO 2019 P1) Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ tais que

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b)$$

para todos $a, b \in \mathbb{Z}_+$.

Solução. Considere p um primo qualquer. Fazendo $P(p, f(p))$ obtemos

$$2f(p) \mid p^2 + f(p)f(f(p)) \implies f(p) \mid p^2$$

Assim, $f(p) \in \{1, p, p^2\}$. Se $f(p) = 1$, então por $P(p, p)$:

$$p + 1 \mid p^2 + 1 \implies p + 1 \mid 2 \implies p = 1$$

uma contradição. Se $f(p) = p^2$, também por $P(p, p)$:

$$p^2 + p \mid p^4 + p^2 \implies p + 1 \mid -2 \implies p = 1$$

Logo, $f(p) = p$ para todo p primo. Agora, fazendo $P(p, b)$:

$$p + b \mid p^2 + pf(b) \implies p + b \mid p + f(b) \implies p + b \mid f(b) - b$$

daí, como $|p + b| \leq |f(b) - b|$ nos leva a um absurdo para p suficientemente grande, devemos ter $f(b) - b = 0 \implies f(b) = b$. Disso, temos que ter $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Z}_+$, que de fato é uma solução.

3 Mais Exercícios

Então, esses exercícios aqui são pra criar caráter. Não coloquei bizarrices, mas eles também não estão tão fáceis. Uma recomendação de como fazer os exercícios: Tente por pelo menos 1h30min. Se não sair, procura no Aops e veja a solução, e então incorpore as novas ideias no seu arsenal contra equações funcionais! Bons estudos! É aqui que se farão os fortes!

Exercício 6. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad e \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercício 7. (IMO 2010 P1) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercício 8. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercício 9. (USAJMO 2015 P4) Determine todas as funções $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tais que

$$f(x) + f(t) = f(y) + f(z)$$

para todos racionais $x < y < z < t$ em progressão aritmética.

Exercício 10. (USAJMO 2021 P1) Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tais que

$$f(a^2 + b^2) = f(a)f(b) \quad e \quad f(a^2) = f(a)^2$$

para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

Exercício 11. (USAMO 2019 P1) Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tais que

$$f^{f(n)}(n) = \frac{n^2}{f(f(n))}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 12. (Ibero 2020) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercício 13. (ELMO 2020 P1) Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tais que

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1$$

para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Exercício 14. (USAJMO 2024 P5) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercício 15. (OBM 2024 P5) Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x^2y - y) = f(x)^2f(y) + f(x)^2 + 1$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercício 16. (OBM 2019 P3) Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tais que

$$f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Veja em [3].

Exercício 17. (OBM 2013 P3) Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ tais que

$$f(x + y)(f(x) + f(y)) = f(xy)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$ tais que $x + y \neq 0$.

Exercício 18. (SL 2018 A1) Seja $\mathbb{Q}_{>0}$ o conjunto dos números racionais positivos. Determine todas as funções $f : \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ que satisfazem

$$f(x^2f(y)^2) = f(x)^2f(y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Exercício 19. (IMO 2022 P2) Seja $\mathbb{R}_{>0}$ o conjunto dos números reais positivos. Determine todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$, exista um único $y \in \mathbb{R}_{>0}$ satisfazendo

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Exercício 20. (SL 2023 A2) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x + y)f(x - y) \geq f(x)^2 - f(y)^2,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Suponha que a desigualdade é estrita para algum $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Referências

- [1] <https://noic.com.br/wp-content/uploads/2023/06/Funcionais.pdf>
- [2] <https://web.evanchen.cc/textbooks/OTIS-Excerpts.pdf>
- [3] https://www.obm.org.br/content/uploads/2020/02/23_S0_Victor_Bitaraes_Problema_3_da_OBM_2019_Nivel_3_compressed.pdf