

CÔNICAS ESCONDIDAS

PROF. LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

lucianogmcastro@gmail.com

@matematicamentexyz

Problemas

1. São dados os dois focos de uma elipse e o tamanho do seu eixo maior. É dada também uma semirreta s com origem em um dos focos. Construa, com régua e compasso, o ponto da elipse pertencente a s .
2. Dado um ponto P exterior a uma elipse com focos F_1 e F_2 , sejam T_1 e T_2 os pontos de contato das tangentes à elipse que passam por P . Prove que

$$\angle T_1 P F_1 = \angle F_2 P T_2.$$

3. Considerando os mesmos pontos do problema anterior, prove que

$$\angle T_1 F_1 P = \angle P F_1 T_2.$$

4. (OBM 2020) Sejam r_A, r_B e r_C semirretas de origem P . O círculo ω_a , de centro X , é tangente a r_B e r_C ; o círculo ω_b , de centro Y , é tangente a r_C e r_A ; e o círculo ω_c , de centro Z , é tangente a r_A e r_B . Suponha que P está no interior do triângulo XYZ , de modo que r_A, r_B e r_C sejam tangentes comuns internas aos círculos correspondentes. Sejam s_A a reta tangente internamente a ω_b e ω_c que não contém r_A , s_B a reta tangente internamente a ω_c e ω_a que não contém r_B e s_C a reta tangente internamente a ω_a e ω_b que não contém r_C . Prove que s_A, s_B e s_C têm um ponto comum Q , e prove que P e Q são conjugados isogonais no triângulo XYZ , ou seja, as retas XP e XQ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle YXZ$ e as retas YP e YQ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle XYZ$.
5. (IMO 2014) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. O ponto H é o pé da perpendicular de A sobre BD . Os pontos S e T são escolhidos sobre os lados AB e AD , respectivamente, de modo que H esteja no interior do triângulo SCT e

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ.$$

Prove que a reta BD é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo TSH .

6. No plano, são dados dois pontos M e N , e uma reta r . Também é dado um segmento de medida k . Determine um ponto A na reta r para o qual $AM + AN = k$.
7. Sejam B e C dois pontos fixos em um círculo de centro O , não formando um diâmetro. Seja A um ponto variável sobre o círculo, distinto de B e C e não pertencente à mediatriz de BC . Sejam H o ortocentro do triângulo ABC , e M e N os pontos médios dos segmentos BC e AH , respectivamente. A reta AM intersecta o círculo novamente em D . Seja P o ponto de interseção entre NM e OD . Determine o lugar geométrico de P quando A varia sobre o círculo.

8. Seja O o circuncentro e H o ortocentro de um triângulo agudo ABC . Prove que existem pontos D , E e F sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente, tais que

$$OD + DH = OE + EH = OF + FH$$

e as retas AD , BE e CF são concorrentes.

9. Seja O o circuncentro do triângulo acutângulo ABC , e seja M um ponto no circuncírculo desse triângulo. Sejam X , Y e Z as projeções de M sobre OA , OB e OC , respectivamente. Prove que o incentro do triângulo XYZ pertence à reta de Simpson de M . Encontre o lugar geométrico do incentro do triângulo XYZ quando M varia sobre o circuncírculo.
10. Seja ABC um triângulo com incentro I e circuncírculo ω . Sejam D e E os outros pontos de interseção de ω com as retas AI e BI , respectivamente. A corda DE encontra AC no ponto F , e BC no ponto G . Seja P o ponto de interseção entre a reta por F paralela a AD e a reta por G paralela a BE . Suponha que as tangentes a ω em A e B encontrem-se em um ponto K . Prove que as três retas AE , BD e KP são concorrentes ou paralelas.
11. Um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em uma circunferência Γ com centro O , e P é um ponto no interior do quadrilátero. Sejam O_1, O_2, O_3, O_4 os circuncentros dos triângulos PAB, PBC, PCD, PDA , respectivamente. Prove que os pontos médios de O_1O_3, O_2O_4 e OP são colineares.
12. Considere uma elipse de focos F e F' , e M um ponto qualquer dessa curva. Traçam-se por M duas secantes MF e MF' , que interceptam a elipse em P e P' , respectivamente. Demonstre que a soma

$$\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'}$$

é constante.

13. Duas elipses têm um foco comum. Prove que a interseção entre elas tem no máximo dois pontos.
14. Dados dois diâmetros conjugados de uma elipse, descreva como construir seus eixos maior e menor.
15. A reta tangente no ponto A de uma hipérbole corta suas assíntotas em B e C . A outra tangente à hipérbole traçada pelo ponto médio M do segmento AC corta a assíntota que passa por B no ponto D . Se O é o centro da hipérbole, prove que OM é paralela a AD .