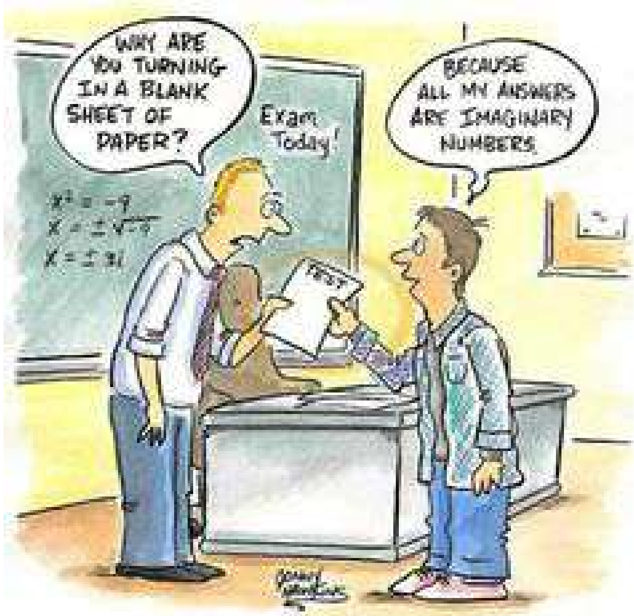
28a Semana Olímpica - Prof. Bruno Holanda

Polinômios em $R[x]$ e $C[x]$



Fatos que você precisa saber...

1. (Teorema Fundamental da Álgebra). Considere que $P(x)$ seja um polinômio complexo de grau $n \geq 1$. Então $P(x)$ possui exatamente n raízes complexas $r_1, r_2, \ldots, r_n$, contando com multiplicidade. Além disso, $P(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - r_i)$ para uma constante c.

2. Lema: Considere que $P(x)$ seja um polinômio com coeficientes reais. Então suas raízes não reais formam pares de conjugados complexos.

3. (Fórmulas de Viète). Considere que o polinômio $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0$ tenha raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Então temos:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n}$$
$$r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{c_{n-2}}{c_n}$$
$$\vdots$$
$$r_1r_2\cdots r_n = (-1)^n\frac{c_0}{c_n}$$

Definição. Para dois polinômios reais $P(x)$ e $Q(x)$, o maior divisor comum $D(x) := \gcd(P, Q)$ é definido como o polinômio real de maior grau que divide tanto $P(x)$ quanto $Q(x)$. Além disso, $\deg D \leq \min(\deg P, \deg Q)$.

4. (Identidade de Bèzout). Considere que $P(x)$ seja um polinômio real de grau n e $Q(x)$ um polinômio real de grau m. Então existem polinômios reais $A(x)$ e $B(x)$ tais que $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = D(x)$, onde $D(x) = \gcd(P, Q)$.

5. Lema: Considere que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios reais que são primos entre si. Temos

$$P(x)|Q(x)R(x) \Longrightarrow P(x)|R(x)$$

6. Lema:. Considere que $P(x)$ e $Q(x)$ sejam polinômios que se intersectam nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Ou seja, $P\left(x_i\right) = Q\left(x_i\right)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Então

$$P(x) - Q(x) = A(x) \prod_{i=1}^{k} \left(x - x_i\right) = A(x) \left(x - x_1\right) \left(x - x_2\right) \ldots \left(x - x_k\right)$$

   para algum polinômio $A(x)$ com $\deg A = \deg(P - Q) - k$. Se $k > \deg P$ e $k > \deg Q$, então $P \equiv Q$.

7. (Teorema do Valor Intermediário). Se a função de valor real f é contínua sobre $[a, b]$, então ela atinge qualquer valor dado entre $f(a)$ e $f(b)$ em algum ponto dentro do intervalo.

8. Lema: Se $P(x)$ é um polinômio com coeficientes reais e tem grau ímpar, então ele possui pelo menos uma raiz real.

9. (Derivada de um Polinômio). Considere o polinômio não constante $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0$ com raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Então temos duas fórmulas para sua derivada:

$$P'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) c_{i+1} x^i$$

   e

$$P'(x) = c_n \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \left(x - r_j\right) = P(x) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - r_i} \right)$$

   Note, em particular, que o grau de $P'(x)$ é sempre um a menos que o grau de $P(x)$ para P não constante.

10. (Raízes Repetidas). Considere que o polinômio $P(x)$ tenha a raiz r com multiplicidade $k \geq 1$. Então r é uma raiz de $P'(x)$ com multiplicidade $k - 1$ (ou se $k = 1$, r não é uma raiz de $P'(x)$).

11. (Teorema de Rolle). Se a função de valor real f é contínua sobre $[a, b]$, diferenciável sobre (a, b), e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

12. (Lema do Entrelaçamento). Se $f(x)$ é uma função diferenciável no intervalo (a, b) e $f(x) = 0$ tem k raízes (contadas com multiplicidade) em (a, b), então $f'(x) = 0$ tem pelo menos $k - 1$ raízes em (a, b).

13. (Regra de Sinais de Descartes). Seja o polinômio $P(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x^{p_i}$, com $0 \leq p_1 < p_2 + \ldots + p_k$ e coeficientes reais não nulos c_i. Seja $V(P)$ o número de mudanças de sinal nos coeficientes de P, ou seja, onde $c_i c_{i+1} < 0$. Seja $Z(P)$ o número de raízes estritamente positivas de $P(x)$. Então, $Z(P) \leq V(P)$ e $V(P) - Z(P)$ é par.

Problemas da Aula

Problema 1. (URSS 1991) Dados $a_1 a_2, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ $2n$ reais distintos. Em um tabuleiro $n \times n$ escreve-se o número $a_i + b_j$ na casa que está i-ésima linha e j-ésima coluna.

Prove que se o produto dos elementos em cada linha é o mesmo, então o produto en cada coluna também é o mesmo.

Problema 2. (Bay Area MO 2004) Ache todos os polinômios mônicos com coeficientes inteiros tais que:

(i) $P(0) = 2004$.

(ii) Se x é irracional, então $P(x)$ é irracional.

Problema 3. Sejam $a_0, a_1, ..., a_n$ números reais tais que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0.$$

Prove que o polinômio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ tem pelo menos uma raiz real.

Problema 4. Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais que satisfaçam

$$P(x\sqrt{2}) = P\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)$$

para todo x real com $|x| \leq 1$.

Problema 5. Seja $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Encontre o maior número real C tal que, para qualquer número inteiro positivo n, temos

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \left(x_k - x_{k-1}\right) > C$$

Problema 6. (RMO TST 2001) Ache todos os polinômios com coeficientes reais $P(x)$ tais que

$$P(x)P\left(2x^2 - 1\right) = P\left(x^2\right)P(2x - 1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 7. (USA TST) Ache todos os polinômios não constantes $P(z)$ de coeficientes complexos tais que todas as raízes complexas de $P(z)$ e $P(z-1)$ têm módulo igual a 1.

Problema 8. Sejam P, Q dois polinômios em $\mathbb{R}[x]$ tais que $\deg P, \deg Q \leqslant n$ e satisfazendo

$$P(x)x^{n+1} + Q(x)^n(x+1)^{n+1} \equiv 1$$

Determine todos os valores possíveis de $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Problema 9. (KOMAL) Ache todos os pares de polinômios mônicos com coeficientes complexos $P(x), Q(x)$ e número natural $n \in \mathbb{N}$ tais que $Q(0) = 0$ e

$$P(Q(x)) \equiv (x-1)(x-2)\dots(x-n)$$

Problema 10. (Putnam 1956) Os polinômios não constantes $P(z)$ e $Q(z)$ com coeficientes complexos possuem o mesmo conjunto de números para suas raízes, mas com multiplicidades possivelmente diferentes. O mesmo é verdadeiro para os polinômios $P(z) + 1$ e $Q(z) + 1$. Prove que $P(z) = Q(z)$.

Problema 11. **(Teorema de Gauss-Lucas)** Se P é um polinômio não constante com coeficientes complexos, todas as raízes de P' pertencem ao envoltório convexo do conjunto das raízes de P.

Problema 12. (Putnam 2018). Seja n um número inteiro positivo, e seja $f_n(z) = n + (n-1)z + (n-2)z^2 + \cdots + z^{n-1}$. Prove que f_n não tem raízes no disco unitário fechado $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Problemas para Casa (ou quarto do Hotel)

Problema 1. (HMMT 2017) Seja $P(x), Q(x)$ polinômios não constantes com coeficientes reais. Prove que, se

$$\lfloor P(y) \rfloor = \lfloor Q(y) \rfloor$$

para todos os números reais y, então $P(x) = Q(x)$ para todos os números reais x.

Problema 2. (Canadá 2013) Determine todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais tais que

$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$

é um polinômio constante.

Problema 3. (Espanha 2002) Encontre todos os polinômios $P(t)$ de uma variável que satisfaçam o seguinte para todos $x, y \in \mathbb{R}$:

$$P(x^2 - y^2) = P(x-y)P(x+y)$$

Problema 4. (USAMO 2014) Sejam a, b, c, d números reais tais que $b - d \geq 5$ e todas as raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 do polinômio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ são reais. Encontre o menor valor que o produto $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1)$ pode assumir.

Problema 5. (Desconhecido) Um polinômio p de grau n satisfaz $p(k) = 2^k$ para todos $0 \leq k \leq n$. Encontre $p(n+1)$.

Problema 6. (Putnam 2023) Seja n um número inteiro positivo e par. Seja p um polinômio monico real de grau $2n$; isto é, $p(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ para alguns coeficientes reais $a_0, \ldots, a_{2n-1}$. Suponha que $p(1/k) = k^2$ para todos os inteiros k tais que $1 \leq |k| \leq n$. Encontre todos os outros números reais x para os quais $p(1/x) = x^2$.

Problema 7. (RMM 2018) Determine se existem polinômios não constantes $P(x)$ e $Q(x)$ com coeficientes reais satisfazendo

$$P(x)^{10} + P(x)^9 = Q(x)^{21} + Q(x)^{20}$$

Problema 8. (ELMOSL 2012) Prove que qualquer polinômio da forma $1 + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_kx^k$ $(k \geq n)$ tem pelo menos $n-2$ raízes não reais (contando multiplicidade), onde os $a_i (n \leq i \leq k)$ são reais e $a_k \neq 0$.

Problema 9. (IMO 2016) A equação

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

está escrita no quadro, com 2016 fatores lineares de cada lado. Qual é o valor mínimo de k para o qual é possível apagar exatamente k desses 4032 fatores lineares de forma que pelo menos um fator permaneça de cada lado e a equação resultante não tenha soluções reais?

Problema 10. (ISL 2020) Uma mágica pretende realizar o seguinte truque. Ela anuncia um número inteiro positivo n, juntamente com $2n$ números reais $x_1 < \cdots < x_{2n}$, para a plateia. Um membro da plateia então escolhe secretamente um polinômio $P(x)$ de grau n com coeficientes reais, calcula os $2n$ valores $P(x_1), \ldots, P(x_{2n})$, e escreve esses $2n$ valores no quadro de forma não decrescente. Após isso, a mágica anuncia o polinômio secreto para a plateia. A mágica pode encontrar uma estratégia para realizar tal truque?

Problema 11. (Rússia 1997) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_m$ números reais não nulos satisfazendo

$$1^k \cdot a_1 + 2^k \cdot a_2 + \cdots + m^k \cdot a_m = 0$$

para cada $k = 0, 1, \ldots, n$. Prove que a sequência $a_1, a_2, \ldots, a_m$ muda de sinal pelo menos $n+1$ vezes.

Problema 12. (USATST 2017) Sejam $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ polinômios não constantes e relativamente primos. Prove que pode haver no máximo três números reais λ tal que $P + \lambda Q$ seja o quadrado de um polinômio.

Problema 13. (ELMOSL 2011) Seja $n > 1$ um número inteiro e a, b, c três números complexos tais que $a + b + c = 0$ e $a^n + b^n + c^n = 0$. Prove que dois dos números a, b, c têm a mesma magnitude.

Problema 14. (China 2018) Suponha que o número real $\lambda \in (0, 1)$, e seja n um número inteiro positivo. Prove que o módulo de todas as raízes do polinômio

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{k(n-k)} x^k$$

é 1.