1 Princípio de Indução

Vamos introduzir uma das ferramentas mais úteis na área da matemática, o princípio de indução finita (PFI) que trata principalmente de provar propriedade envolvendo números naturais. De maneira mais formal, se queremos provar que uma certa propriedade P vale para os naturais seguimos os seguintes passos:

i. Fórmula-se uma conjectura $P(n)$.

ii. Verifica-se casos pequenos da conjectura ($P(0)$, $P(1)$, $P(2), \cdots$).

iii. Formula-se a hipótese que $P(k)$ é válido.

iv. Dada a hipótese, prova-se que $P(k+1)$ também é valido.

2 Exemplos

Problema 1. Prove que:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sol.: Vamos mostrar passo a passo como se resolve o problema.
Nesse caso, a nossa Conjectura é justamente o enunciado, vamos mostrar que o enunciado.

Fazendo casos iniciais: $(n = 0)$ $0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$ (OK!). $(n = 1)$ $0 + 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}$ (OK!)

Formulando a hipótese: Suponha que para $n = k$, vale a igualdade $0 + 1 + 2... + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

Provando para n=k+1: Veja que $0 + 1 + 2... + k + 1 = 0 + 1 + 2 + ... + k + (k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + k + 1$ (por hipótese). Contudo, $\dfrac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ que é justamente a identidade quando $n = k+1$, como queríamos mostrar.

Sendo assim, o resultado segue por indução.

Problema 2. Mostre que $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$ onde F_n é a sequência de Fibonacci.

Sol.: Mais uma vez, a nossa conjectura é o enunciado, vamos mostrar que ele vale.

Fazendo casos pequenos: $(n = 1)$ $1 = F_1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$ (OK!). $(n = 2)$ $1 + 1 = F_1 + F_2 = F_4 - 1 = 3 - 1 = 2$ (OK!) .

Hipótese: Suponha que funcione para $n = k$

Provando para n = k+1: Veja que $F_1 + F_2 + ... + F_{k+1} = F_1 + F_2 + ...F_k + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1}$ (por hipótese). Contudo, $F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1$ que é justamente a identidade quando $n = k+1$.

Sendo assim, o resultado segue por indução.

3 Problemas propostos

3.1 Exercícios inciais

Problema 1. Prove que $2^n > n^2$ para todo $n > 4$.

Problema 2. Prove que $3^n > n^3$ para todo n natural.

Problema 3. Prove que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Problema 4. Prove que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Problema 5. Prove que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Problema 6. Prove que:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^2 = 2^n - 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Problema 7. Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

3.2 Exercícios avançados

Problema 8. Encontre a fórmula geral da seguinte sequência: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ para $n \geq 0$

Problema 9. **(OCM 2016)** Mostre que, para todo $n > 2$, existem n inteiros positivos distintos $a_1, a_2, .., a_n$ tais que:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = 1$$

Problema 10. **(OBM 2020)** Mostre que, para todo n, existem n inteiros positivos distintos $a_1, a_2, .., a_n$ tais que:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + ... + \frac{1}{na_n} = 1$$

Para todo inteiro positivo n.

Problema 11. Seja $k \geq 2$ um inteiro positivo. Defina a sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ como $a_0 = 1$ e para todo $n \geq 0$, a_{n+1} é a o menor inteiro maior que a_n que satisfaz:

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{a_{n+1}}{a_i}} \right\rfloor$$

Prove que todos os primos aparecem na sequência.

Problema 12. **(OCM 2014 N2)** Dizemos que um conjunto X de números naturais é bom quando ele satisfaz a seguinte propriedade: para todo natural x, se $x \in X$, então $2x \notin X$. Para cada natural k, sejam $A_k = \{1, 2, 3, ..., 2^k\}$ e b_k o maior número de elementos que um subconjunto bom de A_k pode ter.

(a) Mostre, para todo $k \geq 2$, temos $b_k = b_{k-2} + 2^{k-1}$.

(b) Para n natural, calcule o valor de b_n em função de n.

Problema 13. Encontre todos os n inteiros positivos tais que o conjunto $\{1, 2, \cdots, 4n\}$ pode ser particionado em n conjuntos de 4 elementos tais que em cada conjunto existe um elemento que é a média dos outros 3.