

PROBLEMAS DA IMO
PROF. LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO
lucianogmcastro@gmail.com
@matematicamentexyz

1. (IMO 2024) Determine todos os números reais α tais que, para todo inteiro positivo n , o inteiro

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

é múltiplo de n (note que $\lfloor z \rfloor$ representa o maior inteiro menor que ou igual a z ; por exemplo, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ e $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$).

2. (IMO 2024) O caracol Turbo joga num tabuleiro retangular com 2024 linhas e 2023 colunas. Em 2022 casas (quadrados unitários) desse tabuleiro existem monstros escondidos. Inicialmente, Turbo não conhece a posição de qualquer um dos monstros, mas ele sabe que existe exatamente um monstro em cada linha, com exceção da primeira e da última linha, e que cada coluna tem no máximo um monstro.

Turbo faz uma série de tentativas para ir da primeira linha à última linha. Em cada tentativa, ele escolhe começar em qualquer casa na primeira linha, e repetidamente se move para uma casa adjacente, ou seja, com um lado em comum (ele pode voltar a uma casa visitada anteriormente). Se ele chega a uma casa em que há um monstro, essa tentativa acaba e ele é transportado de volta para a primeira linha para começar uma nova tentativa. Os monstros não se movem e Turbo lembra se em cada casa que ele visitou há, ou não há, um monstro. Se ele chega a uma casa na última linha, a tentativa acaba e o jogo termina.

Determine o menor valor de n para o qual Turbo tem uma estratégia que garante que ele chegará na última linha na n -ésima tentativa, ou antes, sem importar as posições dos monstros.

3. (IMO 2023) Determine todos os números inteiros $n > 1$ compostos que satisfazem a seguinte propriedade: se $d_1, d_2, \dots, d_k$ são todos os divisores positivos de n com $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, então d_i divide $d_{i+1} + d_{i+2}$ para todo $1 \leq i \leq k-2$.
4. (IMO 2022) O Banco de Oslo emite dois tipos de moedas: moedas de alumínio (denotadas por A) e moedas de bronze (denotadas por B). Marianne tem n moedas de alumínio e n moedas de bronze, dispostas numa linha em alguma ordem inicial arbitrária. Um bloco é qualquer subsequência de moedas consecutivas do mesmo tipo. Dado um inteiro positivo fixo $k \leq 2n$, Marianne realiza repetidamente a seguinte operação: ela identifica o bloco mais longo contendo a k -ésima moeda da esquerda para a direita, e move todas as moedas desse bloco para o extremo esquerdo da linha. Por exemplo, se $n = 4$ e $k = 4$, o processo começando com a seguinte ordem AABBBABA seria

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \cdots$$

Encontre todos os pares (n, k) com $1 \leq k \leq 2n$ tais que, para qualquer ordem inicial, em algum momento durante o processo, as n moedas mais à esquerda serão todas do mesmo tipo.

5. (IMO 2018) Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existem números reais $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$, tais que $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

6. (IMO 2018) Um local é um ponto (x, y) no plano tal que x e y são ambos inteiros positivos menores ou iguais a 20. Inicialmente, cada um dos 400 locais está vazio. Ana e Beto colocam pedras alternadamente com Ana a iniciar. Na sua vez, Ana coloca uma nova pedra vermelha num local vazio tal que a distância entre quaisquer dois locais ocupados por pedras vermelhas seja diferente de $\sqrt{5}$. Na sua vez, Beto coloca uma nova pedra azul em qualquer local vazio. (Um local ocupado por uma pedra azul pode estar a qualquer distância de outro local ocupado.) Eles param quando um dos jogadores não pode colocar uma pedra.

Determine o maior K tal que Ana pode garantir que ela coloca pelo menos K pedras vermelhas, não importando como Beto coloca suas pedras azuis.