Problemas de Análise Complexa

Semana Olímpica 2025 - Salvador/BA

1 Tópicos

1. Funções analíticas: definição, equações de Cauchy-Riemann
2. Integrais complexas: definição, teorema de Cauchy-Goursat, teorema de Morera, fórmula integral/desigualdade de Cauchy
3. Integrais complexas: definição, teorema de Cauchy-Goursat, teorema de Morera, fórmula integral/desigualdade de Cauchy
4. Séries de potências
5. Princípio do Máximo Módulo, Teorema de Liouville/Picard
6. Princípio da Reflexão
7. Singularidades isoladas e teorema dos resíduos
8. Princípio do Argumento/Teorema de Rouché

2 Problemas

1. (OIMU) Encontre todas as funções holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f^2(z) - f^2(w) = f(z+w)f(z-w),$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

2. (OIMU) Seja n um inteiro maior ou igual a 3. Tomemos os números complexos $a_k = k + i\sqrt{k^2-1}$ para $k = 1, 2, ..., n$. Seja $p(x)$ o polinômio $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$. Mostre que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{p'(x)}\, dx = 0.$$

3. (CIIM) Uma função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é chamada de interessante se $f(z)$ é real ao longo da parábola $\mathrm{Re}(z) = (\mathrm{Im}(z))^2$.

   a) Encontre um exemplo de uma função interessante que não seja constante.

   b) Mostre que toda função interessante f satisfaz $f'(-3/4) = 0$.

4. (OIMU) Encontre todas as funções holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ e que satisfaçam $f(a)f(b)f(c) \in \mathbb{R}$ para quaisquer a, b, $c \in \mathbb{C}$ que cumpram as condições $|a| = |b| = |c| = abc = 1$.

5. (OIMU) Sejam $a < b < c < d$ números reais, e seja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-a| \cdot |x-b| \cdot |x-c| \cdot |x-d|}}$.

   Prove que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx.$$

6. (CIIM) Sejam $0 \leq a < b$ números reais. Prove que não existe uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b f(x)x^{2n}\,dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)x^{2n+1}\,dx < 0$$

   para todo inteiro $n \geq 0$.

7. (OIMU) Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o disco unitário no plano complexo e $0 < a < 1$ um número real. Suponhamos que $f : D \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa tal que $f(a) = 1$ e $f(-a) = -1$.

   (a) Mostre que:

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \geq \frac{1}{a}.$$

   (b) Mostre que se f não tem raízes, então:

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \geq \exp\left(\frac{1-a^2}{4a}\pi\right).$$

8. (IMC) Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ um polinômio com coeficientes complexos. Seja $1 = c_0 \geq c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$ uma sequência de números reais que é convexa (isto é, $2c_k \leq c_{k-1} + c_{k+1}$ para todo $k = 1, 2, ..., n-1$), e considere o polinômio

$$q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + c_2 a_2 z^2 + ... + c_n a_n z^n.$$

Prove que

$$\max_{|z|\leq 1} |q(z)| \leq \max_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$