Quadriláteros Completos

Yvens Ian

28ª Semana Olímpica - 30 de janeiro de 2025

---

1 Teoria!!!

Definição 1. Um **quadrilátero completo** consiste de 4 retas, sem três concorrentes nem duas paralelas, e os seis pontos que elas determinam. Todo quadrilátero sem lados paralelos determina um quadrilátero completo, bastando estender seus lados.

Nesse material, sempre que falarmos de quadrilátero completo, considere um quadrilátero $ABCD$ no qual $P = AD \cap BC$, $Q = AB \cap CD$, $R = AC \cap BD$ e sendo M seu ponto de Miquel (Teorema 4).

Teorema 2. ***(Centro de Roto-Homotetia)*** *Sejam AB e CD segmentos, e suponha que $X = AC \cap BD$. Se (ABX) e (CDX) se intersectam novamente em O, então, O é o centro da Roto-Homotetia que leva AB em CD.*

Proposição 3. *O centro da Roto-Homoteteia que leva AB em CD é o mesmo que o centro que leva AC em BD.*

Teorema 4. ***(Ponto de Miquel)*** *Em um quadrilátero completo, as quatro circunferências $(PAB), (PDC), (QAD), (QBC)$ se intersectam no ponto de Miquel M, o centro da Roto-Homotetia que leva AB em DC e BC em AD.*

Lema 5. ***(Quádrupla Harmônica Induzida)*** *Em um quadrilátero completo, se $X = PR \cap CD$, então, $(Q, X; D, C)$ é uma quádrupla harmônica.*

Teorema 6. ***(Reta de Gauss)*** *Os pontos médios das diagonais AC, BD, PQ são colineares.*

Teorema 7. ***(Gauss-Bodenmiller)*** *As circunferências de diâmetros AC, BD, PQ são coaxiais. Seu eixo radical é a reta que passa pelos ortocentros dos triângulos PAB, PCD, QAD, QBC. Essa reta é chamada de **Reta de Steiner** ou **Reta de Aubert**.*

Teorema 8. *Os centros de $(PAB), (PDC), (QAD), (QBC)$ e M estão em uma mesma circunferência.*

Teorema 9. *Os pés das perpendiculares de M para as retas AB, BC, CD, DA são colineares, e essa reta é perpendicular à reta de Gauss.*

Teorema 10. *O quadrilátero completo se mantém ao realizarmos uma extraversão por M no triângulo PMQ, ou seja, $\angle AMC, \angle BMD, \angle PMQ$ têm a mesma bissetriz interna e $MA \cdot MC = MB \cdot MD = MP \cdot MQ$.*

Teorema 11. ***(Emelyanov)*** *Se $X = PQ \cap AC$ e $Y = PQ \cap BD$, então, M pertence ao círculo de nove pontos de RXY.*

1.1 Quadriláteros Inscritíveis

Considere nessa subseção que $ABCD$ é inscritível de centro O. Se esse for o caso, ganhamos mais algumas propriedades interessantes.

Teorema 12. ***(Brocard)*** *O é ortocentro de PQR. Além disso, PQR é auto-polar, isto é, PQ é polar de R, QR é polar de P e PR é polar de Q em relação à circunferência $(ABCD)$.*

Teorema 13. *M é o inverso de R na inversão em $(ABCD)$.*

Corolário 13.1. *P, Q, M são colineares.*

Corolário 13.2. *M está nos circuncírculos de AOC e BOD.*

2 Problemas!

Problema 1. *(USATST 2007) As circunferências ω_1 e ω_2 se encontram em P e Q. Segmentos AC e BD são cordas de ω_1 e ω_2 respectivamente, de modo que o segmento AB e a semirreta CD se encontram em P. A semirreta BD e o segmento AC se encontram em X. Y pertence a ω_1 de modo que $PY \parallel BD$. Z pertence a ω_2 de modo que $PZ \parallel AC$. Prove que os pontos Q, X, Y, Z são colineares.*

Problema 2. *(Teste Cone Sul 2019) Sejam ABC um triângulo e E e F dois pontos arbitrários sobre os lados AB e AC, respectivamente. O circuncírculo do triângulo AEF encontra o circuncírculo do triângulo ABC novamente no ponto M. O ponto D é tal que EF é a mediatriz do segmento MD. Finalmente, O é o circuncentro do triângulo ABC. Prove que D está sobre a reta BC se, e somente se, O pertence ao circuncírculo do triângulo AEF.*

Problema 3. *(NIMO 2014) Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H e seja M o ponto médio de $\overline{BC}$. Denote por ω_B o círculo que passa por B, H e M, e por ω_C o círculo que passa por C, H e M. As retas AB e AC encontram ω_B e ω_C novamente em P e Q, respectivamente. As semirretas PH e QH encontram ω_C e ω_B novamente em R e S, respectivamente.*

Mostre que os triângulos $\triangle BRS$ e $\triangle CRS$ têm a mesma área.

Problema 4. *(PAGMO 2022) Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. Denote por P e Q pontos em BC tais que $\angle BAP = \angle CAQ < \frac{\angle BAC}{2}$. B_1 é um ponto em AC. BB_1 intersecta AP e AQ em P_1 e Q_1, respectivamente. As bissetrizes de $\angle BAC$ e $\angle CBB_1$ intersectam em M. Se $PQ_1 \perp AC$ e $QP_1 \perp AB$, prove que AQ_1MPB é cíclico.*

Problema 5. *(USATSTST 2012) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AC = BD$. As diagonais AC e BD se intersectam em P. Seja ω_1 e O_1 o circuncírculo e o circuncentro do triângulo ABP, respectivamente. Seja ω_2 e O_2 o circuncírculo e o circuncentro do triângulo CDP, respectivamente. O segmento BC encontra ω_1 e ω_2 novamente em S e T (diferentes de B e C), respectivamente. Sejam M e N os pontos médios dos arcos menores $\widehat{SP}$ (que não incluem B) e $\widehat{TP}$ (que não incluem C). Prove que $MN \parallel O_1O_2$.*

Problema 6. *(IMOSL 2009) Dado um quadrilátero cíclico $ABCD$, sejam as diagonais AC e BD que se intersectam em E, e as retas AD e BC que se intersectam em F. Os pontos médios de AB e CD são G e H, respectivamente. Mostre que EF é tangente em E ao círculo que passa pelos pontos E, G e H.*

Problema 7. *(IMOSL 2014) Considere um círculo fixo Γ com três pontos fixos A, B e C sobre ele. Além disso, fixemos um número real $\lambda \in (0,1)$. Para um ponto variável $P \notin \{A, B, C\}$ em Γ, seja M o ponto sobre o segmento CP tal que $CM = \lambda \cdot CP$. Seja Q o segundo ponto de interseção dos circuncírculos dos triângulos AMP e BMC. Prove que, à medida que P varia, o ponto Q pertence a um círculo fixo.*

Problema 8. *(Teste EGMO 2024) Seja $ABCD$ um quadrilátero sem lados iguais e que possui uma circunferência inscrita e uma circunferência circunscrita. A circunferência inscrita de $ABCD$ possui centro I e tangencia AB, BC, CD, DA em W, X, Y, Z, respectivamente. Seja K a interseção das retas WX e YZ. Prove que KI é tangente à circunferência circunscrita a AIC.*

Problema 9. *(IGO 2016) Em um quadrilátero convexo $ABCD$, seja P o ponto de interseção de AD e BC. Suponha que I_1 e I_2 são os incentros dos triângulos PAB e PDC, respectivamente. Seja O o circuncentro de PAB, e H o ortocentro de PDC. Mostre que os circuncírculos dos triângulos AI_1B e DHC são tangentes entre si se, e somente se, os circuncírculos dos triângulos AOB e DI_2C são tangentes entre si.*

Problema 10. *(EGMO 2022) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico com circuncentro O. As bissetrizes internas em A e B se encontram em X, as bissetrizes internas em B e C se encontram em Y, as bissetrizes internas em C e D se encontram em Z, e as bissetrizes internas em D e A se encontram em W. Além disso, AC e BD se encontram em P. Suponha que os pontos X, Y, Z, W, O, e P são distintos. Prove que O, X, Y, Z, W estão no mesmo círculo se, e somente se, P, X, Y, Z, W estão no mesmo círculo.*

Problema 11. *(OBM 2016) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo não-cíclico, sem lados paralelos. As retas AB e CD se encontram em E. Seja $M \neq E$ o ponto de interseção dos circuncírculos de ADE e BCE. As bissetrizes internas dos ângulos de $ABCD$ formam um quadrilátero convexo e cíclico com circuncentro I. As bissetrizes externas dos ângulos de $ABCD$ formam um quadrilátero convexo e cíclico com circuncentro J. Mostre que I, J, M são colineares.*

Problema 12. *(IMO 2021) Seja D um ponto interior do triângulo acutângulo ABC com $AB > AC$ tal que $\angle DAB = \angle CAD$. O ponto E no segmento AC satisfaz $\angle ADE = \angle BCD$, o ponto F no segmento AB satisfaz $\angle FDA = \angle DBC$, e o ponto X na reta AC satisfaz $CX = BX$. Seja O_1 o circuncentro do triângulo ADC e O_2 o circuncentro do triângulo EXD. Prove que as retas BC, EF e O_1O_2 são concorrentes.*