Semelhança de Triângulos, Quadriláteros Cíclicos e Arrastão

Gabriel Torkomian

29/30 de janeiro de 2025

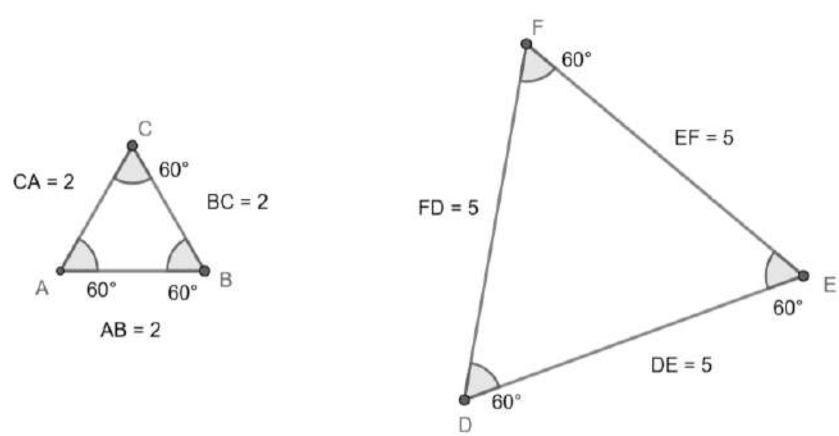
1 Semelhança de Triângulos

Definição 1. *Dizemos que dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes se*

1. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = k$, *com* $k \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$.

Chamaremos esse k como sendo a razão de semelhança dos triângulos. No caso em que $k = 1$, diremos que os triângulos são congruentes. Denotaremos que $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes por $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Aqui, um exemplo simples para ilustrar:



Temos que os triângulos são semelhantes com $k = \dfrac{2}{5}$ ou $k = \dfrac{5}{2}$.

Para afirmar que dois triângulos são semelhantes, não precisamos verificar todas as igualdades da definição.

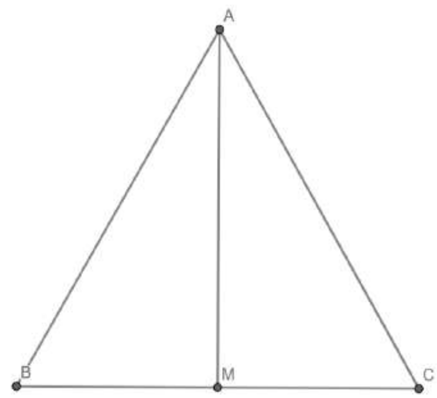
Teorema 1. *Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ triângulos tais que*

1. $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, *então* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. *Esse é o caso de semelhança chamado AA.*
2. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ *e* $\angle B = \angle E$, *então* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. *Esse é o caso de semelhança chamado LAL.*

3. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$*, então* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$*. Esse é o caso de semelhança chamado LLL.*

Vamos ver uma consequência direta desse teorema:

Exemplo 1. *Considere* $\triangle ABC$ *um triângulo isósceles tal que* $AB = AC$*. Então, a altura, a mediana e a bissetriz em relação ao vértice* A*, são iguais.*



Considere M o ponto médio de BC. Note que pelo caso LLL, $\triangle ABM \sim \triangle AMC$. Aí, como os triângulos são semelhantes,

$$\angle AMB = \angle AMC, \angle BAM = \angle CAM$$

do que segue que AM também é bissetriz. Como $\angle AMB + \angle AMC = 180$ e ambos iguais segue que $\angle AMB = \angle AMC = 90$ e AM também é altura.

Exercício 1. *Seja* ABC *um triângulo qualquer. Sejam* M, N *os pontos médios de* AB *e* AC *respectivamente. Prove que* $MN \parallel BC$ *e que* $MN = \dfrac{BC}{2}$*.*

Exercício 2. *Usando a fórmula de Heron para triângulos:*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

onde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$*, mostre que se* $ABC \sim DEF$ *com razão de semelhança* k*, então* $[ABC] = k^2[DEF]$*.*

2 Ângulos na Circunferência e Quadriláteros Cíclicos

Teorema 2. *Seja* Ω *uma circunferência de centro* O *e* A, B, C *pontos distintos em* Ω*. Então:*

$$2\angle BAC = \angle BOC$$

Vamos começar provando um leminha muito importante que envolvem o ortocentro e o circuncentro.

Exercício 3. *Seja* ABC *um triângulo com* $\angle A = 90$*. Mostre que o ponto médio do lado* BC *é o circuncentro do triângulo.*

Lema 1. *Seja* ABC *um triângulo e considere* H, O *seu ortocentro e circuncentro, respectivamente. Então* $\angle BAH = \angle CAO$*.*

Em geral, dados 3 pontos não colineares, sempre existe uma circunferência passando por eles. Nesse sentido, estamos numa situação bem particular quando 4 pontos estão na mesma circunferência. Esse é o começo de toda geometria olímpica...

Teorema 3. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P o encontro de suas diagonais e Q o encontro de AD e BC. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $ABCD$ *é cíclico.*

ii) $\angle ABC + \angle CDA = 180°$.

iii) $\angle ABD = \angle ACD$.

iv) $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

v) $QA \cdot QD = QB \cdot QC$.

Exercício 4. *Prove que um trapézio $ABCD$ com $AB \parallel CD$ é inscritível se, e somente se, $ABCD$ é um trapézio isóceles com $BC = DA$.*

2.1 Reta de Euler e Circunferência dos 9 Pontos

Agora, vamos matar dois coelhos numa cajadada só... vamos treinar semelhança de triângulos, arrastão e ver umas propriedades muito bonitinhas envolvendo os pontos notáveis de um triângulo. Mas antes disso, pra ninguém ficar perdido:

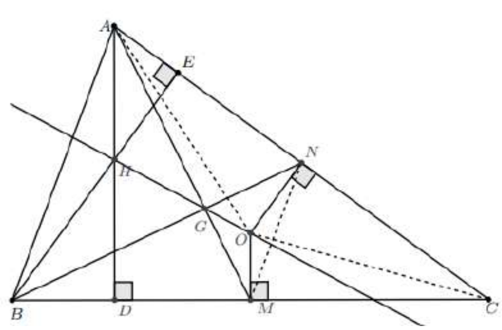
Definição 2. *Seja ABC um triângulo qualquer. Chamamos de:*

- *Ortocentro o encontro das alturas de um triângulo. Normalmente denotaremos o por H.*
- *Baricentro o encontro das medianas de um triângulo. Normalmente denotaremos o por G.*
- *Circuncentro o encontro das mediatrizes de um triângulo. A partir dessa definição, é possível (tente!) mostrar que o circuncentro é centro da circunferência que passa por ABC. Normalmente denotaremos o por O.*
- *Incentro o encontro das bissetrizes de um triângulo. Normalmente denotaremos o por I.A partir dessa definição, é possível (tente!) mostrar que o circuncentro é centro da circunferência inscrita ao $\triangle ABC$.*

Vamos para o primeiro resultado:

Teorema 4. ***(Reta de Euler)*** *Seja ABC um triângulo e O, H e G como acima. Então, H, G, O são colineares nessa ordem e $HG = 2GO$.*

Demostração. Considere a figura:



Sejam M e N os pontos médios de BC e AC, respectivamente. Então, $MN \parallel AB$ e

$$MN = \frac{AB}{2}.$$

Sabemos que $\angle BAD = \angle OAC$. Como O é o circuncentro, então $OA = OC$ e, com isso, $\angle OAC = \angle OCA$. O quadrilátero $MCNO$ é inscritível, então $\angle OCA = \angle NCO = \angle OMN$ e $\angle MON = 180° - \angle BCA$. Além disso, o quadrilátero $DCEH$ também é inscritível e, com isso, $\angle DHE = 180° - \angle ACB$. Como $\angle DHE = \angle AHB$, concluímos que o triângulo AHB é semelhante ao triângulo MNO e, com isso,

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AH}{OM} = 2.$$

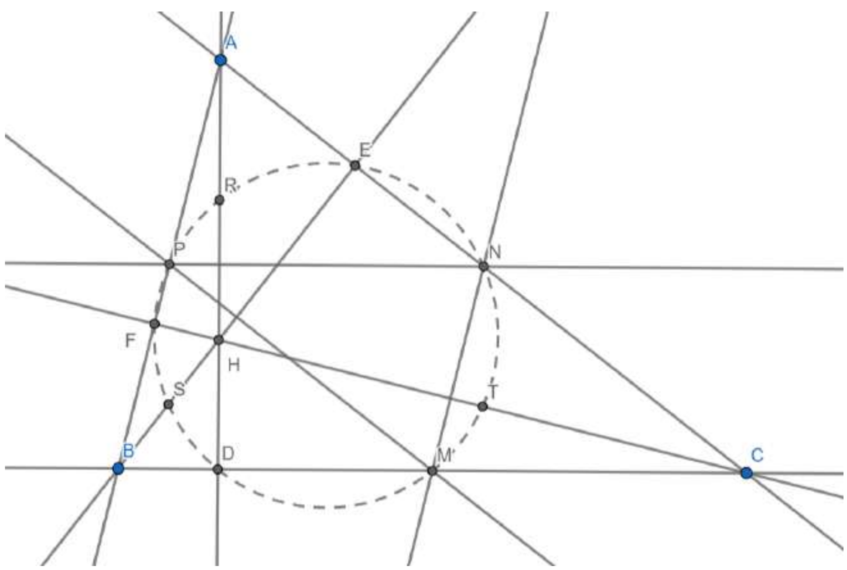
Temos que $\angle HAG = \angle GMO$ pois AH é paralelo a OM e, como claramente $\triangle ABG \sim \triangle GMN$

$$\frac{AG}{GM} = 2.$$

Portanto, o triângulo AHG é semelhante ao triângulo GMO (por LAL) e, com isso, $\angle HGA = \angle LGO$, provando então que H, G e O estão alinhados e $HG = 2GO$.

Teorema 5. ***(Circunferência dos 9 pontos)*** *Seja ABC um triângulo. Então existe uma circunferência que passa pelos pés das alturas, pontos médios dos lados e pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro.*

Demostração. Considere a figura:



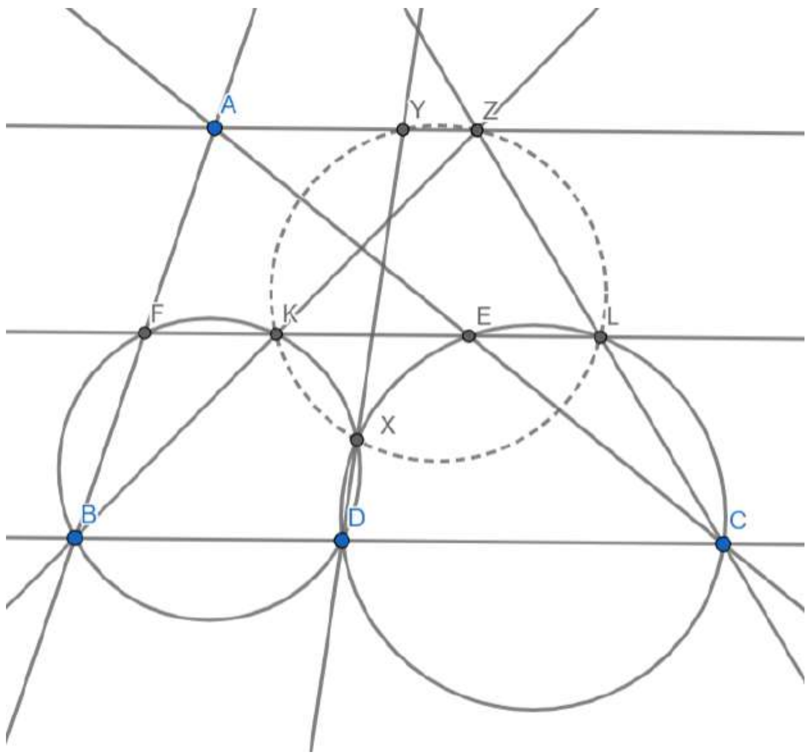
Considere $\omega = (MNP)$ a circunferência que passa pelos 3 pontos médios dos lados do triângulo. Vamos mostrar que $R, D \in \omega$. Para isso, considere Γ a circunferência de diâmetro RM. Note então que $D \in \Gamma$. Também, como $RN \parallel HC$ e $MN \parallel AB$, então $\angle RNM = 90°$. Ou seja, $N \in \Gamma$. Analogamente, $P \in \Gamma$. Ou seja, $\omega = \Gamma$ e concluímos.

Exercício 5. *Mostre que o centro do círculo de 9 pontos é o ponto médio de OH. (Dica: Sendo J esse centro e considerando a nomenclatura acima, mostre que $\triangle RHJ, \triangle JOM$ são congruentes)*

2.2 Probleminhas da OBM

Exemplo 2. ***(OBM 2024 P2/N2)*** *Seja ABC um triângulo escaleno. Sejam E e F os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente, e seja D um ponto qualquer no segmento BC. As circunferências circunscritas aos triângulos BDF e CDE intersectam a reta EF em $K \neq F$ e $L \neq E$, respectivamente, e intersectam-se em $X \neq D$. O ponto Y está sobre a reta DX de modo que AY é paralelo a BC. Prove que os pontos K, L, X e Y estão sobre uma mesma circunferência.*

Solução : Considere a seguinte figura:



Considere $Z = BK \cap CL$. Vamos provar que A, Y, Z são colineares, ou seja, que $AZ \parallel BC$. Observe que $BFKD, DELC$ são trapézios isósceles, então $KD = FB = AB/2$ e $LD = EC = AC/2$. Também

$$\angle KDL = 180 - \angle KDB - \angle LCD = 180 - \angle ABC - \angle ACB = \angle BAC$$

Portanto, $ABC \simeq DKL$ por LAL na razão $2:1$ e $KL = FE = \dfrac{BC}{2}$. Agora, como $KL \parallel BC$, $ZKL \simeq ZBC$ na razão $1:2$. Como $3[ZBC]/4 = [BKLC] = [CBFE] = 3[ABC]/4$, segue que $3[ZBC]/4 = 3[ABC]/4 \implies [ABC] = [ZBC]$ e como ambos triângulos tem a mesma base e mesma área, a altura deve ser igual e concluímos que $AZ \parallel BC$.

Observe que:

$$\begin{aligned}
\angle KXL &= 360 - \angle KXD - \angle LXD \\
&= 360 - (180 - \angle KBD) - (180 - \angle DCL) \\
&= \angle KBD + \angle DCL \\
&= 180 - \angle BZC
\end{aligned}$$

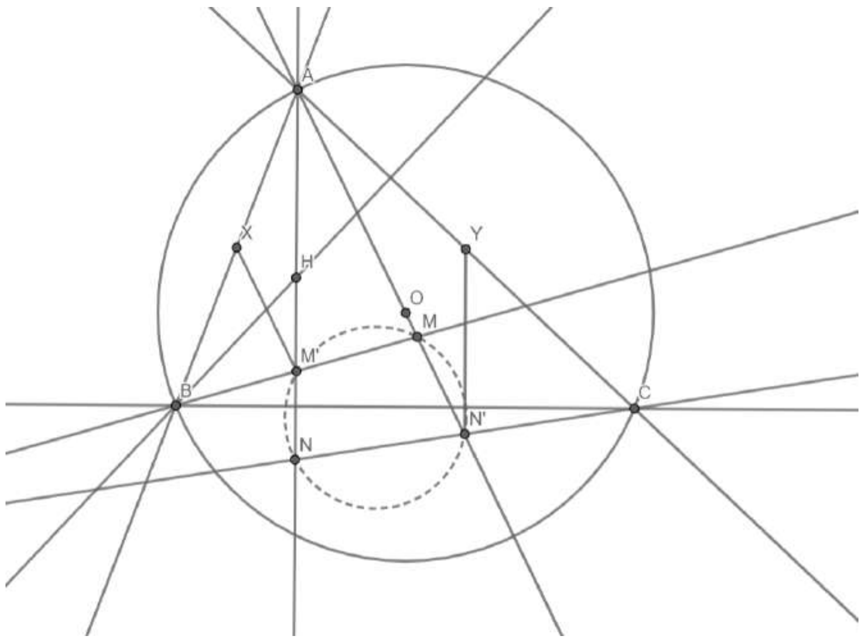
Assim, $KXLZ$ é cíclico. Vamos terminar provando que Y está nessa circunferência. Para isso, veja que:

$$\angle KXY = \angle KBD = \angle KZY$$

E concluímos.

Exemplo 3. ***(OBM 2023 P2/N2)*** *Considere um triângulo $\triangle ABC$ com $AB < AC$ e sejam H e O o seu ortocentro e circuncentro, respectivamente. Uma linha partindo de B intersecta as linhas AO e AH em M e M', de modo que M' é o ponto médio de BM. Outra linha partindo de C intersecta as linhas AH e AO em N e N', de modo que N' é o ponto médio de CN. Prove que os pontos M, M', N, N' pertencem a um mesmo círculo.*

Solução : Considere X, Y os pontos médios de AB e AC respectivamente. Temos a figura:



Pelo nosso leminha, já sabemos que $\angle BAH = \angle CAO$. Também, como XM' é base média do $\triangle BAM$ e YN' é base média do $\triangle CAN$, temos $XM' \parallel MA$ e $YN' \parallel AN$. Assim,

$$\angle XM'A = \angle M'AM = \angle AN'Y$$

Então, pelo caso AA, $\triangle AXM' \sim AN'Y$. Assim

$$\frac{AX}{AY} = \frac{AM'}{AN'} = \frac{XM'}{YN'}$$

Como X, Y são pontos médios:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2AX}{2AY} = \frac{AX}{AY} = \frac{AM'}{AN'}$$

Note que isso já é suficiente para dizermos que $\triangle ABM' \sim AN'C$ pelo caso LAL. Portanto,

$$\angle MM'N = \angle AM'B = \angle AN'C = 180 - \angle MN'N$$

e o quadrilátero $MM'NN'$ é cíclico.

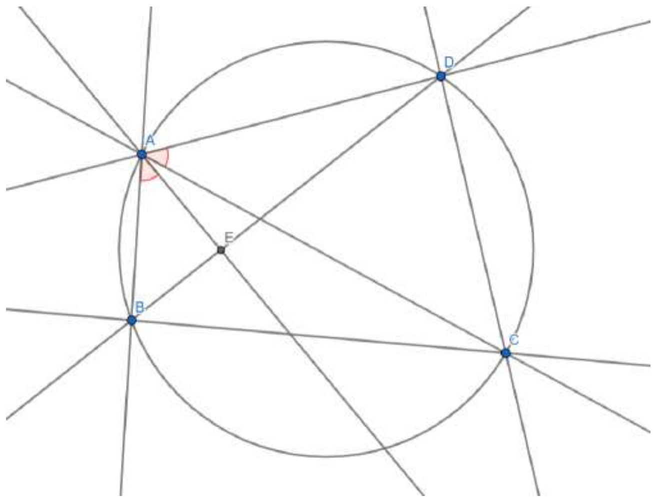
2.3 Teorema de Ptolomeu, Reta de Simson, Teorema da Borboleta e Miquel

Vamos ver mais alguns Teoremas e treinar as técnicas desenvolvidas até aqui.

Teorema 6. *(Ptolomeu) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Então,*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

Solução : Considere $E \in BD$ tal que $\angle BAE = \angle CAD$.



Note então que $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ e $\triangle AED \sim \triangle ABC$, portanto

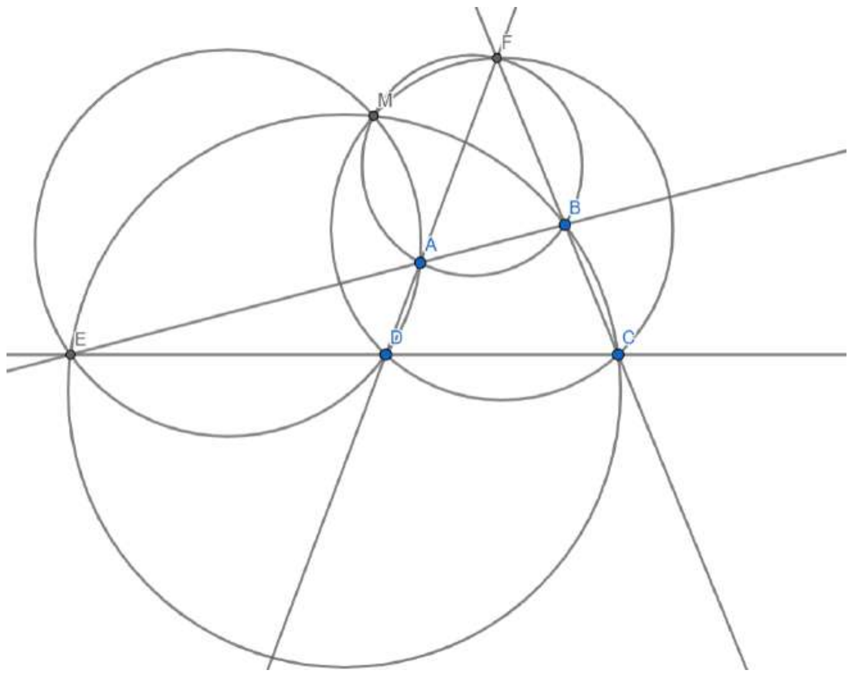
$$\frac{BE}{DC} = \frac{AB}{AC} \iff BE \cdot AC = AB \cdot DC, \quad \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \iff AD \cdot BC = DE \cdot AC$$

Somando, as equações: $AD \cdot BC + AB \cdot DC = DE \cdot AC + AE \cdot AC = AC(DE + AE) = AC \cdot BD$, concluindo o teorema.

Teorema 7. *(Reta de Simson) Seja ABC um triângulo e ω seu circuncirculo. Se $P \in \omega$ e X, Y, Z são as projeções ortogonais de P em AB, BC e CA, então X, Y, Z são colineares.*

Teorema 8. *(Borboleta) Dada uma circunferência ω, sejam EF uma corda de ω e P o ponto médio de EF. Se AC, BD são cordas de ω que passam por P, e AB e CD intersectam EF em M, N então P é ponto médio de MN.*

Teorema 9. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Se $E = AB \cap CD$ e $F = BC \cap DA$, então $(FAB), (FDC), (EDA)$ e (EBC) possuem um ponto em comum M. Tal interseção P é chamada de ponto de Miquel do quadrilátero $ABCD$.*



Exercício 6. *Mostre que na configuração acima, $\triangle MAB \sim \triangle MDC$ e $\triangle MAD \sim \triangle MBC$*

3 Mais Exercícios

Exercício 7. *Seja ABC um triângulo com incentro I circuncirculo ω. Se M é o ponto médio do arco BC que não contém A, então*

$$MI = MB = MC$$

ou seja, M é centro de (IBC).

Exercício 8. *Seja ABC um triângulo de ortocentro H, de forma que D, E, F são os pés das alturas relativas aos vértices A, B, C. Mostre que H é o incentro do triângulo DEF.*

Exercício 9. *Seja ABC um triângulo de ortocentro H e M o ponto médio do lado BC. Seja X o reflexo de H sobre BC e Y o reflexo de H por M.*

a) Mostre que X e Y pertencem a (ABC).

b) Mostre que AY é diâmetro de (ABC).

Exercício 10. *Seja ABC um triângulo e D, E, F pontos nos lados BC, CA, AB, respectivamente. Mostre que existe um ponto pertencente às circunferências (AEF), (BFD), (CDE). Esse ponto é chamado de ponto de Miquel do triângulo.*

Exercício 11. *(OBM 2020) Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC. A bissetriz do ângulo $\angle DAC$ intersecta o segmento DC em E. Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE. Se $\angle BAE = 45°$, calcule a medida do ângulo $\angle BFC$.*

Exercício 12. *(OBM 2019) Seja ABC um triângulo acutângulo e D um ponto qualquer sobre o lado BC. Seja E o simétrico de D em relação a AC e seja F o simétrico de D em relação a AB. A reta ED intersecta a reta AB em G, enquanto a reta FD intersecta a reta AC em H. Prove que os pontos A, E, F, G e H estão sobre uma mesma circunferência.*

Exercício 13. *(Teste Cone Sul 2023) Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito em um círculo e o comprimento do lado AD é igual à soma dos comprimentos dos lados AB e CD. Prove que as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ se intersectam em um ponto sobre o lado AD.*

Exercício 14. *(IMO/P4 2022) Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $BC = DE$. Suponha que exista um ponto T dentro de $ABCDE$ onde $TB = TD$, $TC = TE$ e $\angle ABT = \angle TEA$. A reta AB intersecta as retas CD e CT nos pontos P e Q, respectivamente. Assuma que os pontos P, B, A, Q aparecem nessa ordem na reta. A reta AE intersecta CD e DT nos pontos R e S, respectivamente. Assuma que os pontos R, E, A, S aparecem nessa ordem na reta. Prove que os pontos P, S, Q, R pertencem à mesma circunferência.*

Exercício 15. *(SL/G1 2023) Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $\angle ABC = \angle AED = 90°$. Suponha que o ponto médio de CD seja o circuncentro do triângulo ABE. Seja O o circuncentro do triângulo ACD. Prove que a linha AO passa pelo ponto médio do segmento BE.*

Exercício 16. *(SL/G2 2023) Seja ABC um triângulo com $AC > BC$, e seja ω a circunferência circunscrita a $\triangle ABC$, com raio r. O ponto P é escolhido sobre AC de modo que $BC = CP$, e o ponto S é o pé da perpendicular de P até AB. O raio BP intersecta ω novamente em D. O ponto Q é escolhido sobre a linha SP de modo que $PQ = r$, e S, P, Q estão alinhados nessa ordem. Finalmente, seja E um ponto que satisfaça $AE \perp CQ$ e $BE \perp DQ$. Prove que E pertence a ω.*

Referências

[1] `https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/geometria3/Aula01-Quadrilateros_InscritiveisI.pdf`

[2] `https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/geometria3/Aula02-Quadrilateros_InscritiveisII.pdf`

[3] `https://www.obm.org.br/content/uploads/2024/02/Nivel_1_Angulos_Yvens_SO2024.pdf`