

Sequências de Farey para a Semana Olímpica 2025

Material Base para os Níveis 2 e 3

Carlos Augusto D. Ribeiro

Salvador, Janeiro de 2025

Introdução

Inspirado pelo Problema 6 da OBM 2024, escrevi um artigo para a revista Hipátia (UFBA) abordando as sequências (ou frações) de Farey - um tema que explora da teoria dos números à geometria. Este material que você tem em mãos é um resumo adaptado desse artigo para a Semana Olímpica. Caso queira ver o artigo completo, busque no Google por Hipátia UFBA, depois vá em Repositório de Arquivos e, por fim, em vol02num01.

Agora, voltando à Semana Olímpica, nosso objetivo é duplo: além de mergulharmos na teoria por trás das sequências de Farey, vamos descobrir como a Inteligência Artificial pode ser uma aliada poderosa na resolução de problemas matemáticos complexos. Você verá como essas ferramentas modernas podem complementar seus estudos e auxiliar na preparação para competições matemáticas.

Acompanhe a aula com este material em mãos - a jornada promete ser empolgante!

Construção das Sequências de Farey

Assumiremos frações em forma irredutível, salvo indicação contrária. As sequências de Farey podem ser introduzidas de maneira direta ou através de diagramas ilustrativos, auxiliando a compreensão.

Para fins didáticos, apresentamos o algoritmo de construção das sequências de Farey, destacando cada passo com clareza para facilitar o aprendizado. Iniciamos com a sequência de ordem 1:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

Para construir a sequência de ordem n , denotada por F_n , a partir da sequência de ordem $n-1$, denotada por F_{n-1} , siga os seguintes passos de forma detalhada:

1. Inicialize a nova sequência:

- Comece copiando todos os elementos da sequência F_{n-1} para uma nova sequência, que chamaremos de F_n . Assim, a nova sequência F_n inicialmente é uma cópia de F_{n-1} .

2. Calcule e insira as medianes:

- Para cada par de frações consecutivas $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ em F_{n-1} , calcule a fração mediana entre elas, dada pela fórmula:

$$\text{Mediante} = \frac{a + a'}{b + b'}$$

- A fração mediana é obtida somando os numeradores e os denominadores das frações consecutivas.

3. Verifique a condição do denominador:

- Após calcular a fração mediana $\frac{a+a'}{b+b'}$, verifique se o denominador resultante, $b + b'$, é menor ou igual a n . Isto é importante, pois queremos limitar o tamanho do denominador para garantir que a sequência F_n respeite a ordem definida.
- Se a condição $b + b' \leq n$ for satisfeita, então a fração mediana deve ser inserida entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ na sequência F_n .
- Caso contrário, se $b + b' > n$, a fração mediana não é adicionada, e seguimos para o próximo par de frações consecutivas em F_{n-1} .

4. Concluindo a construção da sequência:

- Repita o processo para todos os pares consecutivos de frações em F_{n-1} . Ao final, a sequência F_n estará completa, contendo tanto as frações da sequência anterior quanto as novas frações medianes que foram inseridas, respeitando o limite do denominador.

Para ilustrar a construção de uma sequência de Farey, consideremos F_4 e construamos F_5 a partir dela. A sequência F_4 é:

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Inicializamos F_5 copiando os elementos de F_4 :

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Para cada par consecutivo $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ em F_4 , calculamos a fração mediante:

$$\text{Mediante} = \frac{a + a'}{b + b'}.$$

A fração mediante é inserida em F_5 apenas se $b + b' \leq 5$.

Os cálculos para F_5 são os seguintes:

- Entre $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{4}$:

$$\text{Mediante} = \frac{0+1}{1+4} = \frac{1}{5}, \quad (\text{inserir, pois } 1+4=5 \leq 5).$$

- Entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$:

$$\text{Mediante} = \frac{1+1}{4+3} = \frac{2}{7}, \quad (\text{não inserir, pois } 4+3=7 > 5).$$

- Entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$:

$$\text{Mediante} = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}, \quad (\text{inserir, pois } 3+2=5 \leq 5).$$

- Entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$:

$$\text{Mediante} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}, \quad (\text{inserir, pois } 2+3=5 \leq 5).$$

- Entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$:

$$\text{Mediante} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}, \quad (\text{não inserir, pois } 3+4=7 > 5).$$

- Entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{1}$:

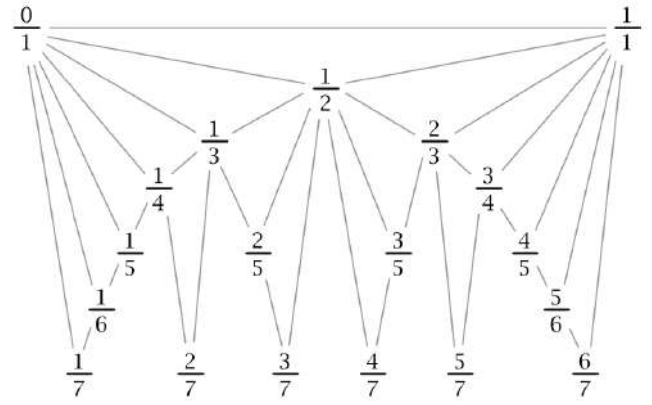
$$\text{Mediante} = \frac{3+1}{4+1} = \frac{4}{5}, \quad (\text{inserir, pois } 4+1=5 \leq 5).$$

Após inserir as medianes válidas, obtemos:

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}.$$

De forma geral, esse processo pode ser resumido no diagrama a seguir:

Finalmente, uma definição direta da sequência de Farey de ordem n :



Definição. A sequência de Farey de ordem n , denotada por F_n , é o conjunto de frações racionais $\frac{r}{s}$, onde $0 \leq r \leq s \leq n$, com $\text{mdc}(r, s) = 1$, dispostas em ordem crescente, incluindo os extremos $0 = \frac{0}{1}$ e $1 = \frac{1}{1}$.

Observe que cada elemento de uma sequência de Farey é uma fração irredutível cujo denominador não ultrapassa um número dado, n . Além disso, essas frações estão organizadas em ordem crescente, garantindo que frações consecutivas sejam sempre as mais simples possíveis.

Propriedades básicas

O Teorema da Vizinhança de Farey (TVF) é um dos resultados centrais na teoria das sequências de Farey. Ele estabelece as condições necessárias e suficientes para que duas frações consecutivas sejam vizinhas, sendo essencial para estudar aproximações racionais e para fundamentar diversas outras propriedades e resultados importantes da teoria.

Teorema. (da Vizinhança de Farey) Temos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ são frações consecutivas na sequência de Farey F_n se, e somente se, $bc - ad = 1$ e $b + d \geq n + 1$.

Demonstração. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, a equação linear $bx - ay = 1$ tem uma solução $x = x_0$, $y = y_0$. Além disso, $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ também será uma solução para qualquer inteiro t . Escolha $t = t_0$ de forma que

$$0 \leq n - b < y_0 + bt_0 \leq n$$

e defina $x = x_0 + bt_0$, $y = y_0 + bt_0$. Como $y \leq n$, $\frac{x}{y}$ será uma fração em F_n . Além disso,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{a}{b}$$

de modo que $\frac{x}{y}$ aparece depois na sequência de Farey do que $\frac{a}{b}$. Se $\frac{x}{y} \neq \frac{c}{d}$, então $\frac{x}{y} > \frac{c}{d}$ e obtemos

$$\frac{x}{y} - \frac{c}{d} = \frac{dx - cy}{dy} \geq \frac{1}{dy}$$

bem como

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} \geq \frac{1}{bd}$$

Somando as duas desigualdades, obtemos

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{dy} + \frac{1}{bd} = \frac{b+y}{bdy}$$

Mas $b+y > n$ (lembre que $n-b < y$) e $d \leq n$, resultando na contradição

$$\frac{1}{by} = \frac{bx - ay}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{b+y}{bdy} > \frac{n}{bdy} \geq \frac{1}{by}$$

Assim, $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$ e a equação $bx - ay = 1$ torna-se $bc - ad = 1$. $\square$

As frações consecutivas em uma sequência de Farey serão chamadas de "vizinhas de Farey". Um resultado importante, o Corolário da Mediane, mostra que a fração intermediária entre duas vizinhas é obtida somando os numeradores e os denominadores dessas frações. Esse corolário destaca a simetria e a estrutura das sequências de Farey, evidenciando como as medianes surgem naturalmente entre as frações originais.

Corolário. (da Mediane) Se $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$ são vizinhas de Farey contidas em F_n , então

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}.$$

Demonstração. Aplicando o TVF aos pares adjacentes:

1) Para $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$:

$$b'a - ba' = 1. \quad (1)$$

2) Para $\frac{a'}{b'}$ e $\frac{a''}{b''}$:

$$b''a' - b'a'' = 1. \quad (2)$$

Subtraindo a equação (1) da equação (2):

$$(b''a' - b'a'') - (b'a - ba') = 1 - 1,$$

$$(b''a' - b'a'') - (b'a - ba') = 0.$$

Simplificando:

$$b''a' - b'a'' - b'a + ba' = 0,$$

$$a'(b'' + b) - b'(a'' + a) = 0.$$

Reorganizando:

$$a'(b + b'') = b'(a + a'').$$

Assim, obtemos:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}.$$

$\square$

O TVF estabeleceu uma cota mínima ótima para a soma dos denominadores de duas frações vizinhas. Isso levou à questão sobre a existência de uma cota mínima similar para três frações vizinhas. Tal cota existe, e embora inicialmente seja apresentada uma versão menos refinada, sua forma otimizada será demonstrada no problema 6 da OBM 2024, que resolveremos ao fim do artigo. Enquanto isso, veja o

Corolário. (da Cota Mínima) Se $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$ são frações vizinhas de Farey contidas em F_n , então

$$b + b' + b'' \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{3} \right\rceil.$$

Demonstração. Do corolário anterior, sabemos que $\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}$. Seja então $d = (a + a'', b + b'')$. Logo o TVF nos dá que:

$$b + \frac{b + b''}{d} \geq n + 1 \quad \text{e} \quad b'' + \frac{b + b''}{d} \geq n + 1,$$

donde obtemos que

$$\begin{aligned} \left(b + \frac{b + b''}{d}\right) + \left(b'' + \frac{b + b''}{d}\right) &\geq 2(n + 1) \\ \Rightarrow b + b'' &\geq \frac{2d(n + 1)}{d + 2} \end{aligned}$$

Assim, vale que

$$\begin{aligned} b + b' + b'' &= b + b'' + \frac{b + b''}{d} \\ &= (b + b'') \frac{(d + 1)}{d} \\ &\geq \frac{2d}{d + 2} \cdot (n + 1) \frac{(d + 1)}{d} \\ &= 2(n + 1) \frac{(d + 1)}{d + 2} \\ &\geq 2(n + 1) \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Segue o resultado. $\square$

O Lema da Quantidade de Termos (LQT) fornece uma maneira de calcular quantos elementos existem em uma sequência de Farey. Se quisermos saber quantos elementos tem uma sequência de ordem

n , podemos usar a função phi de Euler - que conta quantos números são coprimos com n - e somar esse valor à quantidade de elementos da sequência anterior. Assim, chegamos ao

Lema. (da Quantidade de Termos) A quantidade de termos da sequência de Farey F_n é dado pela seguinte fórmula recursiva:

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

Uma contagem simples nos mostra que

$$|F_n| = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k).$$

Por sua vez, outro resultado bem conhecido em Teoria dos Números (pesquise!) nos revela que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varphi(k)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}.$$

Problemas Olímpicos Resolvidos

Agora, vamos colocar a teoria em prática, resolvendo alguns problemas olímpicos.

Problema 1. Em uma formação regular de $n \times n$, há n^2 estudantes dispostos em uma grade. Dois estudantes podem ver um ao outro se a linha direta de visão entre eles não estiver obstruída por outro estudante. Em outras palavras, se três estudantes estão colineares, o estudante do meio bloqueia a linha de visão entre os outros dois. Quantos estudantes o estudante localizado no canto inferior esquerdo da grade pode ver?

Solução. Coloquemos coordenadas nos estudantes, de forma que aquele no canto inferior esquerdo seja o ponto $(0,0)$. Assim, a quantidade de estudantes que o estudante na posição $(0,0)$ enxerga acima da diagonal $y = x$ é equivalente ao número de frações irredutíveis na sequência de Farey F_{n-1} .

Ao restringirmos apenas aos pontos (x,y) com $x \leq y$, estamos contando o número de frações irredutíveis entre 0 e 1 com denominador no máximo $n-1$. A resposta final é, então, $2|F_{n-1}| - 1$, onde $|F_n|$ representa o número de termos na sequência de Farey de ordem n . $\square$

Problema 2. Sejam P e Q polinômios inteiros. Suponha que, para todos os inteiros a e b , $aP + bQ$ possua uma raiz inteira. Então P e Q possuem uma raiz inteira em comum.

Solução. Suponha que P e Q não têm raízes inteiras em comum. Vamos demonstrar que isso leva a uma

contradição. Da suposição que P e Q não têm raízes inteiras em comum, temos que $(P(n), Q(n)) \neq (0,0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a aplicação linear $T_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = xP(n) + yQ(n)$ é subjetiva e seu kernel é um subespaço de dimensão 1 que passa pela origem, em outras palavras, o kernel de T_n , que chamaremos de R_n , é uma reta que passa pela origem e com coeficiente angular racional. Seja

$$\mathbb{Z}^2 / \sim = \{[(a, b)] : (a, b) \in \mathbb{Z}^2, 0 < |a|, |b| \leq n\},$$

onde $[(a, b)] = \{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 : bd = ac\}$. Defina a função

$$A: \mathbb{Z}_n^2 / \sim \rightarrow R = \{R_n; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$A([(a, b)]) = R_k, \text{ onde } (a, b) \in R_k.$$

Como para todo $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ existe k inteiro tal que $aP(k) + bQ(k) = 0$, então A está bem definida. É imediato também que A é injetiva. Se $aP(k) + bQ(k) = 0$, então, pelo Critério de Pesquisa de Raízes Racionais, temos

$$k \leq |aP(0) + bQ(0)| \leq 2n \cdot \max\{|P(0)|, |Q(0)|\}$$

Logo, usando o Problema 1, concluímos que

$$2|F_n| - 1 \leq 2n \cdot \max\{|P(0)|, |Q(0)|\},$$

um absurdo, já que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F_n|}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}$. Segue o resultado. $\square$

Problema 3. A sequência de Fibonacci é definida como $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Suponha que a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{b}$ está entre as duas frações $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ e $\frac{f_{n+1}}{f_n}$. Mostre que $b \geq f_{n+1}$.

Solução. De fato, podemos usar a mesma estratégia da prova do TVF para mostrar que, se $|ad - bc| = 1$, para cada fração $\frac{p}{q}$ que está entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, temos que q é maior ou igual a $b + d$.

Tome $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ e $ad - bc = -1$. Então, $\frac{p}{q} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bq}$ e $\frac{c}{d} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{dq}$ (pois $pb > aq$ e $cq > pd$). Somando-as, temos

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bq} + \frac{1}{dq}.$$

Como $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$, temos $\frac{1}{bd} \geq \frac{b+d}{bdq}$. Assim, obtemos $q \geq b + d$.

Neste caso, $|f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1}| = 1$. Logo, para qualquer $\frac{p}{q}$ entre $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ e $\frac{f_n}{f_{n-1}}$, temos $q \geq f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$. $\square$

Problema 4 Existe um conjunto de esferas $\mathcal{S}$, duas a duas disjuntas, tal que para cada ponto $P \in \mathbb{Q}^2$ existe uma esfera $s \in \mathcal{S}$ tangente ao plano no ponto P ?

Solução. Sim, existe tal conjunto de esferas. Vamos construir explicitamente esse conjunto de esferas disjuntas, associando a cada ponto $P \in \mathbb{Q}^2$ uma esfera tangente ao plano no ponto P .

Começamos considerando as sequências de Farey F_n . Definimos então $F_n^2 = F_n \times F_n$, que é o conjunto de pontos no quadrado unitário $[0, 1]^2$ com coordenadas racionais e denominadores limitados por n .

Observamos que $F_n^2 \subseteq F_{n+1}^2$ e que a união de todos os F_n^2 é exatamente $\mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2$. Para cada $n \geq 1$, definimos o conjunto dos novos pontos introduzidos na etapa n como $S_n = F_n^2 \setminus F_{n-1}^2$, com a convenção de que $F_0^2 = \emptyset$.

Nosso objetivo é associar esferas disjuntas aos pontos em F_n^2 de forma que, para cada $P \in F_n^2$, exista uma esfera tangente ao plano no ponto P , e que essas esferas sejam disjuntas entre si. Faremos isso por indução em n .

Suponha que já tenhamos associado esferas disjuntas aos pontos em F_{n-1}^2 , todas com raios menores ou iguais a r_{n-1} . Na etapa n , queremos associar esferas aos pontos em S_n de modo que:

1. As esferas associadas aos pontos em S_n sejam disjuntas entre si. 2. As esferas associadas aos pontos em S_n não intersectem as esferas já atribuídas aos pontos em F_{n-1}^2 .

Para garantir isso, escolhemos um raio r_n suficientemente pequeno. Como S_n é um conjunto finito de pontos cujas coordenadas têm denominadores entre $n-1$ e n , existe uma distância mínima positiva δ_n entre quaisquer dois pontos distintos em S_n , e uma distância mínima positiva ϵ_n entre um ponto em S_n e um ponto em F_{n-1}^2 . Escolhemos então r_n tal que:

$$r_n < \frac{1}{3} \min\{\delta_n, \epsilon_n, r_{n-1}\}.$$

Com essa escolha, associamos a cada ponto $P \in S_n$ uma esfera de raio r_n , centrada em (x_P, y_P, r_n) , onde (x_P, y_P) são as coordenadas de P . Essa esfera é tangente ao plano $z = 0$ no ponto P .

Verifiquemos que as esferas associadas aos pontos em S_n são disjuntas entre si:

Para quaisquer dois pontos distintos $P, Q \in S_n$, a distância entre eles no plano é pelo menos δ_n . Portanto, a distância entre os centros das esferas é também pelo menos δ_n , e como $2r_n < \delta_n$, as esferas não se intersectam.

Além disso, as esferas associadas aos pontos em S_n não intersectam as esferas associadas aos pontos em F_{n-1}^2 . A distância entre um ponto $P \in S_n$ e um ponto $Q \in F_{n-1}^2$ é pelo menos ϵ_n , e a soma dos raios das esferas correspondentes é menor que $r_n + r_{n-1} \leq$

$\frac{1}{3}\epsilon_n + r_{n-1} \leq \epsilon_n$, pois $r_n \leq \frac{1}{3}\epsilon_n$ e $r_{n-1} \leq \frac{1}{3}\epsilon_n$. Portanto, as esferas não se intersectam.

Procedendo dessa forma para cada n , atribuímos esferas disjuntas a todos os pontos em $\mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2$. Para pontos em $\mathbb{Q}^2$ fora do quadrado unitário, podemos estender a construção por translações inteiras, cobrindo todo o plano racional $\mathbb{Q}^2$. $\square$

Problema 5 (OBM 2024 - Nível 3 - Problema 6) Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Enumere em ordem crescente todas as frações irredutíveis do intervalo $[0, 1]$ que têm denominador positivo e menor ou igual a n :

$$\frac{0}{1} = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \dots < \frac{p_M}{q_M} = \frac{1}{1}.$$

Determine, em função de n , o menor valor possível de $q_{i-1} + q_i + q_{i+1}$, $0 < i < M$.

Solução. Seja S_n a menor soma dos denominadores de três frações consecutivas na sequência de Farey de ordem n . Do Corolário da Cota Mínima, temos que

$$S_n \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{3} \right\rceil.$$

Pela prova do Corolário, essa cota seria atingida assumindo $d \geq 1$ (mantendo a notação usada na prova do corolário). Repetindo os mesmos cálculos, se a cota mínima fosse atingida para $d \geq 2$, então teríamos

$$S_n \geq \left\lceil \frac{3(n+1)}{2} \right\rceil.$$

Usaremos essas estimativas para provar que, para $k \geq 1$, a tripla de frações cuja soma dos denominadores é mínima é:

$$\begin{aligned} n = 6k &\rightarrow \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{2}{4k+1}, \frac{1}{2k} \right), \\ n = \begin{cases} 6k+1, \\ 6k+2, \\ 6k+3 \end{cases} &\rightarrow \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{2}{4k+3}, \frac{1}{2k+1} \right), \\ n = 6k+4 &\rightarrow \left(\frac{k}{2k+1}, \frac{2k+1}{4k+4}, \frac{k+1}{2k+3} \right), \\ n = 6k+5 &\rightarrow \left(\frac{1}{2k+3}, \frac{2}{4k+5}, \frac{1}{2k+2} \right). \end{aligned}$$

Note inicialmente que, pelo TVF, cada trio de frações é de fato composto por frações consecutivas das respectivas sequências. Também é imediato pelo Corolário da Cota Mínima que, para os casos $n = 6k$ e $n = 6k+3$, as respectivas frações já atingem o mínimo ótimo, sendo portanto a melhor cota. Mostremos para os demais casos que, de fato, as frações citadas nos fornecem a melhor cota possível. A tabela a seguir detalha as cotas mínimas para cada estimativa:

n	Cota mín. para $d = 1$	Cota mín. para $d = 2$	Cota mín. conjecturada
$6k+1$	$8k+3$	$9k+3$	$8k+6$
$6k+2$	$8k+4$	$9k+3$	$8k+6$
$6k+4$	$8k+7$	$9k+6$	$8k+8$
$6k+5$	$8k+8$	$9k+8$	$8k+10$

Note que, para $k > 3$, as estimativas para $d \geq 2$ já superam as cotas conjecturadas. Então, deixamos os casos $k = 1, 2, 3$ como exercício e voltamos nossa atenção para quando $d = 1$.

Quando $d = 1$, temos S_n par e, portanto, para o caso $n = 6k + 4$, concluímos que $S_{6k+4} = 8k + 8$. Veja os demais casos a seguir:

Casos $n = 6k + 1$ e $n = 6k + 2$: Faremos as contas para $n = 6k + 1$, mas o caso $n = 6k + 2$ é totalmente análogo. Suponha que $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{u}{v}$ é um trio em F_{6k+1} tal que $b + y + v = 8k + 4$. Assim, temos $y = b + v = 4k + 2$. Como $b + y \geq 6k + 2$, $y + v \geq 6k + 2$ e $(b, y) = (y, v) = 1$, segue que $b = v = 2k + 1$. As equações do TVF nos dão

$$\begin{cases} 2k(a + u) - a(2k + 1) = 1, \\ (2k + 1)u - 2k(a + u) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ku - a = 1, \\ u - 2ka = 1, \end{cases}$$

chegando à contradição $(2k + 1)(u - a) = 2$. Logo, $S_{6k+1} = 8k + 6$.

Caso $n = 6k + 5$:

Mantendo a notação do caso anterior, suponha agora que $b + y + v = 8k + 8$. Devemos ter $b + y \geq 6k + 6$, $y + v \geq 6k + 6$ e $y = b + v = 4k + 4$. Com isso, $b \geq 2k + 3$ e $v \geq 2k + 3$, já que y é par, o que leva a uma contradição, pois a soma já supera $4k + 6$. Daí, $S_{6k+5} = 8k + 10$.

Concluímos, portanto, que as cotas mínimas para $n \geq 6$ são:

$$S_n = 8 \cdot \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \begin{cases} 2, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{6}, \\ 6, & \text{se } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{6}, \\ 8, & \text{se } n \equiv 4 \pmod{6}, \\ 10, & \text{se } n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Os casos iniciais são $S_1 = 2, S_2 = 4, S_3 = 6, S_4 = 8, S_5 = 10$. Assim, concluímos o problema. $\square$

Exercícios gerais da teoria

Exercício 1. Se $\frac{0}{1} \leq \dots < \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots \leq \frac{1}{2}$ são frações vizinhas na sequência de Farey, mostre que $\frac{1}{2} \leq \dots < \frac{b_2 - a_2}{b_2} < \frac{b_1 - a_1}{b_1} < \dots \leq \frac{1}{1}$ também são frações vizinhas.

Exercício 2. Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ são vizinhas de Farey contidas em F_n , então

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a + a'}{b + b'} \right| = \frac{1}{b(b + b')} \leq \frac{1}{b(n + 1)},$$

e

$$\left| \frac{a'}{b'} - \frac{a + a'}{b + b'} \right| = \frac{1}{b'(b + b')} \leq \frac{1}{b'(n + 1)}.$$

Exercício 3. Na sequência de Farey F_n , prove que a soma dos elementos no denominador é duas vezes a soma dos elementos no numerador para todo inteiro positivo n . (Dica: Comece mostrando que para todos os inteiros $n \geq 0$ e $k \geq 0$, vale que $\sum_{(k,n)=1} k = \frac{n\phi(n)}{2}$ e depois use indução para concluir.)

Exercício 4. Mostre que os denominadores de cada fração em F_n para todo n na sequência de Farey formam uma sequência palíndroma.

Exercício 5. Se x é um número real e n é um inteiro positivo, mostre que podemos encontrar inteiros a e b relativamente primos, tal que $0 < b \leq n$ e

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{b(n + 1)}.$$

Exercício 6. Se ξ é um número real e irracional, então existem infinitas frações $\frac{a}{b}$ tais que

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}.$$

Exercício 6. [Hurwitz] Dado um número irracional ξ , mostre existem infinitos números racionais $\frac{h}{k}$ tais que

$$\left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}$$

tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$.

Exercícios Olímpicos

Exercício 1. Seja $a_1, a_2, \dots, a_n$ uma sequência finita de inteiros. Dizemos que essa sequência é *regular* se existe um número real x tal que

$$[kx] = a_k \quad \text{para } 1 \leq k \leq n.$$

Dado um índice $1 \leq k \leq n$, o termo a_k é chamado de *forçado* se a única forma de completar a sequência $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, b$ para ser regular é tomando $b = a_k$ (ou seja, a_k é forçado se não houver outra opção para b que mantenha a regularidade da sequência). Encontre o número máximo possível de termos forçados em uma sequência regular com 1000 termos.

Exercício 2. Observe as seguintes frações. No primeiro passo temos $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{0}$, e em cada passo escrevemos $\frac{a+b}{c+d}$ entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, e fazemos isso indefinidamente.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{0}{1} & & & & & & \frac{1}{0} \\ \frac{0}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{0} \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{0} \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & \end{array}$$

- (a) Prove que cada uma dessas frações é irredutível.
- (b) No plano, colocamos infinitos círculos de diâmetro 1, sobre cada inteiro na reta real, um círculo. Indutivamente, colocamos círculos de forma que cada círculo seja tangente a dois círculos adjacentes e à reta real, e continuamos isso indefinidamente. Prove que os pontos de tangência desses círculos são exatamente todos os números na parte (a) (exceto $\frac{1}{0}$).

Exercício 3. (IMO Shortlist 2016) Considere frações $\frac{a}{b}$ onde a e b são inteiros positivos.

- (a) Prove que, para todo inteiro positivo n , existe tal fração $\frac{a}{b}$ tal que $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n} + 1$ e $b \leq \sqrt{n} + 1$.
- (b) Mostre que existem infinitos inteiros positivos n tais que nenhuma fração $\frac{a}{b}$ satisfaz $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n} + 1$ e $b \leq \sqrt{n}$.

Exercício 4. (OBM 2024 - Nível U) Para cada inteiro positivo n , enumere em ordem crescente todas as frações irredutíveis do intervalo $[0, 1]$ que têm denominador positivo e menor ou igual a n :

$$\frac{0}{1} = \frac{p_0}{q_0} < \frac{1}{n} = \frac{p_1}{q_1} < \dots < \frac{1}{1} = \frac{p_{M(n)}}{q_{M(n)}}.$$

Seja k um inteiro positivo. Definimos, para cada n tal que $M(n) \geq k - 1$,

$$f_k(n) = \min \left\{ \sum_{s=0}^{k-1} q_{j+s} : 0 \leq j \leq M(n) - k + 1 \right\}.$$

Determine, em função de k , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_k(n)}{n}$.

Exercício 5. (USOMO 2020) Suponha que $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{100}, b_{100})$ são pares ordenados distintos de inteiros não negativos. Seja N o número de pares de inteiros (i, j) que satisfazem $1 \leq i < j \leq 100$ e $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Determine o maior valor possível de N considerando todas as escolhas possíveis dos 100 pares ordenados.

Exercício 6. (USAMO 1999) Seja $p > 2$ um número primo e sejam a, b, c, d inteiros não divisíveis por p , tais que

$$\left\{ \frac{ra}{p} \right\} + \left\{ \frac{rb}{p} \right\} + \left\{ \frac{rc}{p} \right\} + \left\{ \frac{rd}{p} \right\} = 2$$

para qualquer inteiro r não divisível por p . Prove que pelo menos dois dos números $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$ são divisíveis por p .

Bibliografia

- [1] Art of problem solving community. <https://artofproblemsolving.com/community>, 2024. Accessed: 2024.
- [2] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from the book*. Springer, Berlin, 1998.
- [3] Johar Ashfaq. *Farey Sequences*. 2020.
- [4] D. M. Burton. *Elementary Number Theory*. Allyn and Bacon, Inc., 1980.
- [5] Soham Das, Kishaloy Halder, Sanjoy Pratihar, and Partha Bhowmick. Properties of Farey sequence and their applications to digital image processing. *Computer Science & Engineering*, 2019.
- [6] Scott B. Guthery. *A Motif of Mathematics*. unknown, 2010.
- [7] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 5 edition, 1979.
- [8] A. Hatcher. Topology of numbers. <http://www.math.cornell.edu/hatcher>, 2020. Chapter 1.
- [9] Fabio E. Brochero Martinez, Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau C. Saldanha, and Eduardo Tengan. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 2020.
- [10] Antonio Caminha Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos Números*, volume 5 of *Coleção do Professor de Matemática*. SBM, 2020.
- [11] Ivan Niven and Herbert S. Zuckerman. *An introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley Sons, Inc, New York, 1960.
- [12] Ripan Saha. On some special property of the Farey sequence. *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences*, 7(2):121–123, March 2019.
- [13] Dylan Zukin. The Farey sequence and its niche(s), May 2016.