

Tabuleiros

Semana Olímpica/2025

Prof. Armando Barbosa

Salvador, 31 de janeiro de 2018

1 Exercícios resolvidos no material

Problema 1. (*Holanda/TST-2024*) Em um tabuleiro 2023×2023 , há besouros em algumas das células 1×1 , com, no máximo, um besouro por célula. Após um minuto, cada besouro se move uma célula vizinha ou para a direita ou para a esquerda ou para cima ou para baixo. Após cada minuto adicional, os besouros continuam a se mover para campos adjacentes, mas eles sempre fazem uma volta de 90° , ou seja, quando um besouro se move para a direita ou para a esquerda, ele agora se move para cima ou para baixo, e vice versa. Um besouro nunca deixa de se movimentar e nunca sai do tabuleiro. Por exemplo, se ele chegou na quina esquerda e alta do tabuleiro por um movimento à esquerda, então os próximos movimentos dele serão para baixo e, depois, para à direita. Qual é o número mínimo de besouros nesse tabuleiro para que, independentemente de onde comecem e como se movam (de acordo com as regras), tenhamos, em algum momento, dois besouros na mesma célula?

Problema 2. (*OBM/2024 - N2*) Os números de 1 a 100 são colocados sem repetição em cada casinha de um tabuleiro 10×10 . Um *caminho crescente* de tamanho k nesse tabuleiro é uma sequência de casinhas $c_1, c_2, \dots, c_k$ tal que, para cada $i = 2, 3, \dots, k$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- as casinhas c_i e c_{i-1} compartilham um lado ou um vértice;
- o número em c_i é maior que o número em c_{i-1} .

Qual é o maior inteiro positivo k para o qual sempre podemos encontrar um caminho crescente de tamanho k , independentemente de como os números de 1 a 100 estão dispostos no tabuleiro?

Problema 3. (*IMO/SL - 2023/C1*) Sejam m e n inteiros positivos maiores que 1. Em cada quadrado 1×1 de um tabuleiro $m \times n$, há uma moeda, inicialmente com a face coroa virada para cima. Um movimento permitido consiste nas seguintes etapas:

- Selecionar um quadrado 2×2 do tabuleiro;
- Virar as moedas dos quadrados superior esquerdo e inferior direito desse 2×2 ;
- Virar exatamente uma moeda ou do quadrado unitário superior direito ou do quadrado inferior esquerdo desse 2×2 .

Observe que, em um movimento, exatamente 3 moedas são viradas. Determine todos os pares (m, n) para os quais é possível que cada moeda apareça com a face cara para cima após um número finito de movimentos.

Problema 4. (*Romênia/TST - 2023*) Considere um tabuleiro 4×4 de modo que cada casinha 1×1 está preenchida com um número, sendo todos os números distintos dois a dois, de maneira que, em cada linha e em cada coluna, há um número que é igual à soma dos outros três. Determine o menor valor possível do maior número desse tabuleiro.

Problema 5. (*Hong Kong/TST - 2014*) Há 100 quadrados 1×1 num tabuleiro 10×10 . Cada quadrado é pintado de exatamente uma cor. Qual é o número máximo de cores que pode ser usada de modo que em cada linha e em cada coluna, o número de cores diferentes usadas para colori-las seja, no máximo, igual a 5?

Problema 6. (*Rioplantense/2012*) Determine o maior número de fichas retangulares 1×4 que podem ser colocadas em um tabuleiro 10×10 de maneira que quaisquer duas fichas não se tocam nem em seus lados e nem em seus vértices.

Problema 7. (*Romênia/TST - 2012*) Determine a quantidade máxima de reis que podemos colocar num tabuleiro de xadrez 12×12 de modo que cada rei ataque exatamente um dos outros reis.

Obs.: Um rei ataca apenas as casas que possuem um ponto ou um lado em comum com a casa em que ele está.

Problema 8. Seja $n > 1$ um inteiro. Considere um tabuleiro $n \times n$, que teve um dos seus quadradinhos 1×1 de uma ponta removido. Determine, com prova, o menor inteiro positivo k tal que o tabuleiro restante pode ser particionado em k triângulos de áreas iguais.

Problema 9. É possível cobrir totalmente um quadrado de lado 1997 com quadrados de lados maiores que 30 e menores que 1997, sem deixar buracos, nem fazer sobreposições e nem sair do tabuleiro?

2 Umas de EGMO para treinar

Problema 10. (EGMO/2013) Determine todos os inteiros m tais que um quadrado $m \times m$ pode ser dividido em 5 retângulos, cujos lados são, em alguma ordem, os números 1, 2, $\dots$, 10.

Problema 11. (EGMO/2015) Um dominó é uma peça 1×2 ou 2×1 . Determine de quantas formas podemos colocar exatamente n^2 dominós, sem sobreposições, num tabuleiro $2n \times 2n$ de forma que cada quadrado 2×2 contém, no mínimo, dois quadradinhos unitários descobertos na mesma linha ou na mesma coluna.

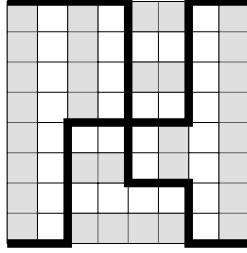
Problema 12. (EGMO/2016) Seja m um inteiro positivo. Considere um tabuleiro $4m \times 4m$ de quadradinhos unitários 1×1 , chamados células. Duas células são ditas relacionadas entre si quando estão na mesma linha ou na mesma coluna. Nenhuma célula é relacionada a si mesma. Sabendo que algumas células serão pintadas de vermelho de forma que cada célula está relacionada a, no mínimo, duas células vermelhas, determine o número mínimo de células vermelhas.

Dicas e ideias de soluções para as da EGMO estão na folha seguinte.

2.0.1 Dicas/Ideias de soluções

Problema 10. Comparando áreas, temos que: $\frac{1}{2}(1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + \cdots + 10 \cdot 1) \leq m^2 \leq \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 10 \cdot 10)$. Daí, como m é inteiro, temos que: $11 \leq m \leq 13$. Além disso, é possível provar que não haverá três retângulos cobrindo um lado do quadrado e, conseqüentemente, são quatro retângulos margeando os lados e um no meio. Para $m = 11$ dá certo, usando retângulos da forma 10×5 , 1×9 , 8×2 , 3×6 e, no meio, 7×4 . Para $m = 12$ não dá certo, pois seria necessário um retângulo 1×6 no meio e aí fazendo as contas não funciona. Para $m = 13$ dá certo, usando retângulos da forma 10×6 , 3×8 , 4×5 , 9×7 e, no meio, 1×2 .

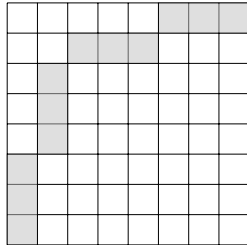
Problema 11. A resposta é $\binom{2n}{n}^2$. Para $n = 4$, segue um exemplo:



A ideia é partindo da percepção de que cada dominó deve ficar em um desses subtabuleiros 2×2 , concluir que há uma bijeção entre as formas de colocar os dominós e os modos de realizar dois caminhos (um começando do ponto inferior esquerdo e terminando no ponto superior direito e outro começando do ponto inferior direito e terminando no ponto superior esquerdo) nesse tabuleiro. Cada um desses caminhos tem tamanho $2n$, no qual escolhe-se n caminhos para direita. Por exemplo, na situação apresentada acima, temos:

- caminho do ponto inferior esquerdo e para o ponto superior direito: $\rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \downarrow \rightarrow$;
- caminho do ponto inferior direito e para o ponto superior esquerdo: $\rightarrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \rightarrow$.

Problema 12. A resposta é $6m$. Apresentemos um exemplo para $m = 2$:



Para provar a minimalidade de $6m$, comece com um grafo bipartido formado uma parte pelas linhas, a outra parte pelas colunas, de modo que a linha L_i e a coluna C_j são conectados se, e somente se, a célula da linha L_i e coluna C_j é pintada de vermelho. Queremos o mínimo de arestas nesse grafo bipartido. Sendo g o grau, pelo enunciado, temos que $g(L_i) + g(C_j) - e(L_i, C_j) \geq 2$, sendo $e(L_i, C_j) = 0$, caso L_i e C_j não tenham uma aresta ligando eles e 2, caso contrário. Pela expressão acima, temos que cada componente conexa tem, pelo menos, 4 vértices, pois a ligação de L_i com C_j implica em $g(L_i) + g(C_j) \geq 4$ e, assim, faltariam, pelo menos, outros dois vértices. Daí, o grafo tem, no máximo, $\frac{2 \cdot 4m}{4} = 2m$ componentes conexas e, portanto, tem, no mínimo, $8m - 2m = 6m$ arestas, conforme lema: um grafo com n vértices e k componentes conexas possui, pelo menos, $(n - k)$ arestas. A prova para tal lema é imaginar os n vértices sem arestas e perceber que cada aresta adicionada diminui, no máximo, uma componente conexa. O caso de minimalidade desse lema acontece quando nenhuma aresta fecha um ciclo.