Tabuleiros

Semana Olímpica/2025 - Nível 2 - Salvador/BA

Prof. Armando Barbosa

31 de janeiro de 2025

Esse material é formado por partes do capítulo de tabuleiros presente no livro Combinatória do Zero ao IME/ITA/Cone Sul/EGMO

Um assunto frequente em questões de olimpíadas de matemática é tabuleiros. Recentemente, foi o assunto abordado, entre outras questões, na questão 3 do nível 2 da OBM/2024 e na questão C1 da Shortlist da IMO/2023.

O tema é amplo e pode ser dividido em diversos tópicos como, por exemplo:

- Colorações com duas cores (por exemplo, xadrez, zebra, bispo e etc)
- Colorações de mais que duas cores
- Colocações de peças e números
- Coberturas

Além disso, esse tema pode ser visto em conjunto com outros assuntos como, por exemplo, PCP e geometria combinatória. Por ser um assunto abrangente, não é nossa pretensão abordar tudo nesse material.

Sendo assim, esse trabalho está dividido nas seguintes seções:

1. Colorações com mais que 2 cores
2. Olhares local e global
3. Coberturas

Focaremos mais em apresentar questões e soluções. Para um aluno interessado em saber mais e/ou se aprofundar, sugerimos o uso do livro mencionado nas primeiras linhas desse material.

Avancemos.

1 Colorações com mais que 2 cores

A ideia dessa seção é apresentar situações que envolvem colorações com mais que duas cores.

Para isso, apresentaremos as soluções das questões a seguir:

Problema 1. *(OBM/2024 - N2)* Os números de 1 a 100 são colocados sem repetição em cada casinha de um tabuleiro 10×10. Um *caminho crescente* de tamanho k nesse tabuleiro é uma sequência de casinhas $c_1, c_2, \cdots, c_k$ tal que, para cada $i = 2, 3, \cdots, k$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- as casinhas c_i e c_{i-1} compartilham um lado ou um vértice;
- o número em c_i é maior que o número em c_{i-1}.

Qual é o maior inteiro positivo k para o qual sempre podemos encontrar um caminho crescente de tamanho k, independentemente de como os números de 1 a 100 estão dispostos no tabuleiro?

Solução: Primeiramente, notemos que qualquer subtabuleiro 2×2 tem um caminho crescente.

Daí, temos que a resposta é, no mínimo, 4. Para provar que a resposta é 4 mesmo, basta, então, apresentar um exemplo.

Apresentemos o exemplo começando com a mesma coloração da solução anterior:

A	C	A	C	A	C	A	C	A	C
B	D	B	D	B	D	B	D	B	D
A	C	A	C	A	C	A	C	A	C
B	D	B	D	B	D	B	D	B	D
A	C	A	C	A	C	A	C	A	C
B	D	B	D	B	D	B	D	B	D
A	C	A	C	A	C	A	C	A	C
B	D	B	D	B	D	B	D	B	D
A	C	A	C	A	C	A	C	A	C
B	D	B	D	B	D	B	D	B	D

As casinhas serão preenchidas com os seguintes números conforme suas cores:

A. Números de 1 a 25;

B. Números de 26 a 50;

C. Números de 51 a 75;

D. Números de 76 a 100.

Daí, analisando o tabuleiro apresentado, temos que o maior caminho crescente é $A \to B \to C \to D$.

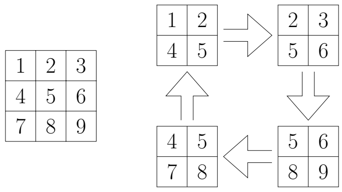
Logo, segue que a resposta é $\boxed{4}$. ■

Problema 2. *(Holanda/TST-2024)* Em um tabuleiro 2023×2023, há besouros em algumas das células 1×1, com, no máximo, um besouro por célula. Após um minuto, cada besouro se move uma célula vizinha ou para a direita ou para a esquerda ou para cima ou para baixo. Após cada minuto adicional, os besouros continuam a se mover para campos adjacentes, mas eles sempre fazem uma volta de $90°$, ou seja, quando um besouro se move para a direita ou para a esquerda, ele agora se move para cima ou para baixo , e vice versa. Um besouro nunca deixa de se movimentar e nunca sai do tabuleiro. Por exemplo, se ele chegou na quina esquerda e alta do tabuleiro por um movimento à esquerda, então os próximos movimentos dele serão para baixo e, depois, para à direita. Qual é o número mínimo de besouros nesse tabuleiro para que, independentemente de onde comecem e como se movam (de acordo com as regras), tenhamos, em algum momento, dois besouros na mesma célula?

Antes de pensar na solução, vamos para uma estratégia de pensar casos pequenos.

Para isso, consideremos um tabuleiro 3×3 e numeremos as células de 1 a 9.

Com 4 besouros, poderíamos ter uma situação sem que haja dois na mesma célula, conforme exemplificado a seguir:



Porém, no tabuleiro 3×3, com 5 besouros não será possível evitar a situação desejada pelo enunciado.

Generalizando a ideia apresentada para um tabuleiro $n \times n$, podemos conjecturar que nossa resposta será $(n-1)^2+1$, uma vez que para $(n-1)^2$ besouros, podemos proceder de forma análoga ao que fizemos, a partir de quatro subtabuleiros $(n-1) \times (n-1)$, para evitar dois besouros na mesma célula.

Vamos para a solução.

Solução: Façamos o caso geral do tabuleiro $n \times n$, para n ímpar, e substituiremos n por 2023 no final.

Analogamente ao que fizemos no caso 3×3, podemos pegar quatro subtabuleiros $(n-1) \times (n-1)$, um em cada quina do tabuleiro, colocar um besouro em cada célula e, então, fazer todos se movimentarem em sentido horário. Dessa forma, não teremos dois na mesma célula.

Portanto, nossa resposta é, no mínimo, $(n-1)^2+1$. Provemos que tal número é suficiente.

Para isso, comecemos com uma coloração de quatro cores que mistura as colorações xadrez e zebra:

- nas colunas ímpares, começando da primeira linha, vamos colorir, alternadamente, com as cores A e B;

- nas colunas pares, começando da primeira linha, vamos colorir, alternadamente, com as cores C e D;

Nesse caso, a coloração fica assim:

A	C	A	C	$\cdots$	C	A
B	D	B	D	$\cdots$	D	B
A	C	A	C	$\cdots$	C	A
B	D	B	D	$\cdots$	D	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
B	D	B	D	$\cdots$	D	B
A	C	A	C	$\cdots$	C	A

Como n é ímpar, então existe k inteiro tal que: $n = 2k+1$. Fazendo as contas com k, temos as seguintes quantidades de células de cada cor:

- $(k+1)^2$ células com a cor A;

- $(k+1)k$ células com a cor B;

- $k(k+1)$ células com a cor C;

- k^2 células com a cor D.

Note que a sequência das cores das células que cada besouro passa é, necessariamente, uma das duas sequências a seguir:

$$\cdots \to A \to C \to D \to B \to A \to \cdots \text{ ou } \cdots \to A \to B \to D \to C \to A \to \cdots$$

Daí, tomemos um minuto qualquer. Para $n = 2k+1$, temos que $(n-1)^2+1 = 4k^2+1$ e, então, pelo P.C.P., temos que uma das duas situações acontece:

1. há, pelo menos, $2k^2 + 1$ besouros em células de cores B e C; OU

2. há, pelo menos, $2k^2 + 1$ besouros em células de cores A e D

Se acontece a situação 1, então no minuto seguinte, pelo movimentos de cada besouro, ocorrerá a situação 2. Consideremos, então, a situação 2, e podemos fazer isso uma vez que ela sempre ocorre.

Novamente, pelo P.C.P., em cada situação 2, haverá uma das situações a seguir:

2. há, pelo menos, $2k^2 + 1$ besouros em células de cores A e D

    a há, pelo menos, $k^2 + 1$ besouros em células de cor A; OU

    b há, pelo menos, $k^2 + 1$ besouros em células de cor D.

Se acontece a situação 2a, então dois minutos depois, pelo movimentos de cada besouro, ocorrerá a situação 2b. Consideremos, então, a situação 2b, e podemos fazer isso uma vez que ela sempre ocorre.

Na situação 2b, que sempre ocorre, teremos $k^2 + 1$ besouros para k^2 células com a cor D. Logo, pelo P.C.P., teremos, em tal situação, pelo menos, 2 besouros em alguma célula.

Juntando isso com o exemplo apresentado inicialmente, segue que a resposta é $(n - 1)^2 + 1$. Em particular, para $n = 2023$, a resposta é igual a $\boxed{2022^2 + 1}$. ■

Problema 3. *(IMO/SL - 2023/C1)* Sejam m e n inteiros positivos maiores que 1. Em cada quadradinho 1×1 de um tabuleiro $m \times n$, há uma moeda, inicialmente com a face coroa virada para cima. Um movimento permitido consiste nas seguintes etapas:

- Selecionar um quadrado 2×2 do tabuleiro;

- Virar as moedas dos quadradinhos superior esquerdo e inferior direito desse 2×2;

- Virar exatamente uma moeda ou do quadradinho unitário superior direito ou do quadradinho inferior esquerdo desse 2×2.

Observe que, em um movimento, exatamente 3 moedas são viradas. Determine todos os pares (m, n) para os quais é possível que cada moeda apareça com a face cara para cima após um número finito de movimentos.

Solução: A resposta é $3 \mid mn$. Há várias formas de se fazer os casos em que dão certo, sendo uma delas perceber que se o não múltiplo de 3 for par, então basta dividir o tabuleiro em L-triminós e, caso contrário, perceber com três movimentos em um subtabuleiro 2×3 é possível virar exatamente um dos subtabuleiros 1×3 e, assim, transformar o tabuleiro no caso em que um múltiplo de 3 e o outro é par. Para provar a condição $3 \mid mn$ pode-se colorir o tabuleiro na forma bispo adaptada para três cores, igual ao que fizemos na solução do teste da Cone Sul. Para entender melhor, vejamos um exemplo para um tabuleiro 4×5:

0	1	2	0	1
1	2	0	1	2
2	0	1	2	0
0	1	2	0	1

Daí, sejam x_0, x_1 e x_2 as quantidades de moedas com face cara nos quadradinhos de cores 0, 1 e 2, respectivamente. Inicialmente, temos que $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. Cada movimento altera exatamente um quadradinho de cada cor e, portanto, as paridades de $x_0 - x_1$ e de $x_1 - x_2$ são invariantes. Por outro lado, fazendo os casos $m, n \pmod 3$, podemos concluir que $x_0 - x_1$ e $x_1 - x_2$ só serão, ambos, pares quando $3 \mid mn$. ■

Continuemos nossos estudos, vendo agora ideias para olhar localmente e globalmente.

2 Olhares local e global

Alguns especialistas de olimpíada de matemática costumam dividir alguns problemas de combinatória entre:

1. olhar globalmente, entendendo o processo da questão como um todo;
2. olhar localmente, entendendo o processo da questão pontualmente.

Dito isso, vejamos alguns exemplos de tabuleiro em cada caso:

2.1 Olhar global

Problema 4. *(Romênia/TST - 2023)* Considere um tabuleiro 4×4 de modo que cada casinha 1×1 está preenchida com um número, sendo todos os números distintos dois a dois, de maneira que, em cada linha e em cada coluna, há um número que é igual à soma dos outros três. Determine o menor valor possível do maior número desse tabuleiro.

Solução: Sejam M_i os maiores números da linha i, para todo $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Supondo, sem perda de generalidade, que $M_1 > M_2 > M_3 > M_4$ e atentando que $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ é, no mínimo, igual a $1 + 2 \cdots + 12$, já que os números são todos distintos dois a dois, podemos conluir que:

$$M_1 \geqslant M_2 + 1 \geqslant M_3 + 2 \geqslant M_4 + 3 \Rightarrow \begin{cases} M_1 - 1 \geqslant M_2 \\ M_1 - 2 \geqslant M_3 \\ M_1 - 3 \geqslant M_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{somando tudo com } M_1 \Rightarrow 4M_1 - 6 \geqslant M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \geqslant 1 + 2 + \cdots + 12 \Rightarrow$$

$$4M_1 - 6 \geqslant \frac{12 \cdot 13}{2} = 78 \Rightarrow \boxed{M_1 \geqslant 21}$$

Para concluir a solução, segue o exemplo para $M_1 = 21$:

4	6	11	21
5	3	20	12
9	19	2	8
18	10	7	1

Resposta: $\boxed{21}$ ■

Problema 5. *(Hong Kong/TST - 2014)* Há 100 quadradinhos 1×1 num tabuleiro 10×10. Cada quadradinho é pintado de exatamente uma cor. Qual é o número máximo de cores que pode ser usada de modo que em cada linha e em cada coluna, o número de cores diferentes usadas para colorí-las seja, no máximo, igual a 5?

Solução: A resposta é 41. Segue o exemplo maximal:

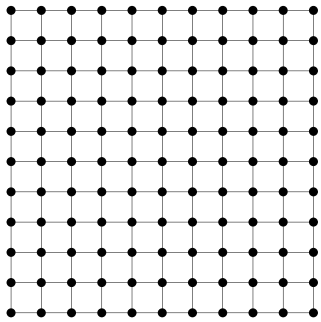
1	1	1	1	1	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	6	7	8	9	1
1	1	1	1	10	11	12	13	1	1
1	1	1	14	15	16	17	1	1	1
1	1	18	19	20	21	1	1	1	1
1	22	23	24	25	1	1	1	1	1
26	27	28	29	1	1	1	1	1	1
30	31	32	1	1	1	1	1	1	33
34	35	1	1	1	1	1	1	36	37
38	1	1	1	1	1	1	39	40	41

Note que o exemplo acima maximiza a situação em que cada par de linhas e de colunas tem exatamente quatro cores diferentes entre elas. Para concluir, suponhamos que fosse possível com mais. Nesse caso, teríamos, pelo menos, duas linhas ou duas colunas com exatamente cinco cores diferentes entre elas. Sem perda de generalidade, suponhamos que sejam as linhas 1 e 2. Daí, para que as colunas tenham, no máximo, 5 cores distintas, teríamos que cada coluna poderia ter, entre as linhas 3 e 10, no máximo, 3 novas cores, uma vez que as linhas 1 e 2 já usaram duas das possíveis e isso totaliza, no máximo $5+5+3\cdot 10 = 40 < 41$, concluindo, assim, a contradição. ■

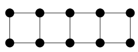
2.2 Olhar localmente

Problema 6. *(Rioplatense/2012)* Determine o maior número de fichas retangulares 1×4 que podem ser colocadas em um tabuleiro 10×10 de maneira que quaisquer duas fichas não se tocam nem em seus lados e nem em seus vértices.

Solução: Notemos que o tabuleiro 10×10 possui $11^2 = 121$ pontos:



E que as fichas possuem 10 pontos:



Daí, surge a estimativa de que há, no máximo:

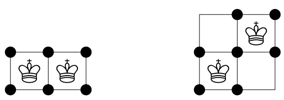
$$\left\lfloor \frac{121}{10} \right\rfloor = \boxed{12}$$

Daí, o exemplo com 12 já foi apresentado na solução anterior. ■

Sobre a solução anterior, ressaltemos a simetria em relação ao vértice central do tabuleiro que, por sinal, é o único não pertecente a qualquer ficha.

Problema 7. *(Romênia/TST - 2012)* Determine a quantidade máxima de reis que podemos colocar num tabuleiro de xadrez 12×12 de modo que cada rei ataque exatamente um dos outros reis.
<u>*Obs.:*</u> Um rei atacada apenas as casas que possuem um ponto ou um lado em comum com a casa em que ele está.

Solução: Um rei pode atacar outro quando está lado a lado ou quando está na diagonal do outro. Vejamos a quantidade de pontos que eles "ocupam" em cada um desses casos:

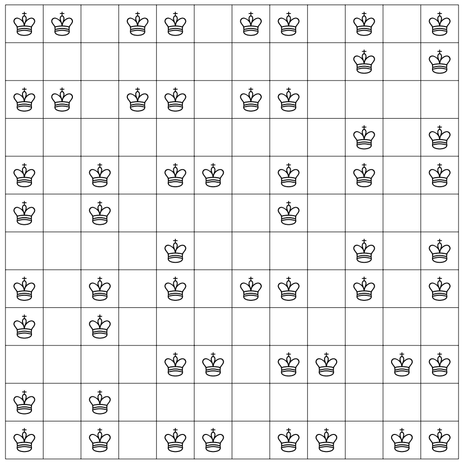


Dessa forma, o caso da esquerda parece mais eficiente, uma vez que ocupa apenas 6 pontos, ao invés de 7.

Como o tabuleiro 12×12 tem $13^2 = 169$ pontos e cada ponto só pode ser ocupado por, no máximo, um par de reis se atacando, podemos concluir que nossa quantidade máxima de pares de reis se atacando é, no máximo:

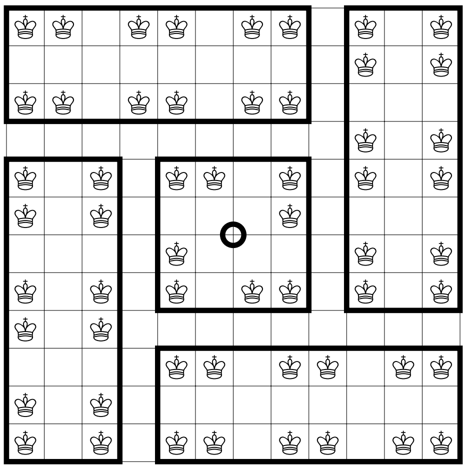
$$\left\lfloor \frac{169}{6} \right\rfloor = 28$$

Bastando, para concluir a solução, a apresentação do exemplo com 28 pares de reis:



Portanto, a resposta é: $2 \cdot 28 = \boxed{56}$. ■

Sobre a construção do exemplo, vale uma ressalva de que era necessário usar $28 \cdot 6 = 168$ pontos, de modo que só sobraria 1. Sabendo disso, fica menos difícil encontrar um exemplo que solucione, ainda mais se, buscar usar uma simetria em relação ao centro do tabuleiro:



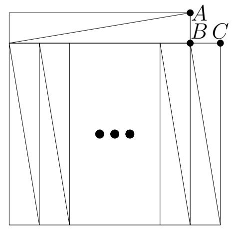
Seguindo nossos estudos, vendo agora questões que podem <u>ou não</u> envolver PCP.

3 Coberturas

A ideia aqui é apresentar questões que envolvem coberturas de tabuleiros.

Problema 8. Seja $n > 1$ um inteiro. Considere um tabuleiro $n \times n$, que teve um dos seus quadradinhos 1×1 de uma ponta removido. Determine, com prova, o menor inteiro positivo k tal que o tabuleiro restante pode ser particionado em k triângulos de áreas iguais.

Solução: A resposta é $k = 2n + 2$. Segue um exemplo de maximal:



Provemos que não há caso com k maior.

Nesse caso, temos que, pelo menos, uma das bases desses triângulos é uma parte de ou, no máximo igual a, AB ou BC. Logo, a base é no máximo 1 e a altura é, no máximo, $(n-1)$.

Nesse caso, a área é igual a, no máximo, $\dfrac{1 \cdot (n-1)}{2} = \dfrac{(n-1)}{2}$. Daí, como a área total é $n^2 - 1$, podemos concluir que:

$$k \cdot \frac{(n-1)}{2} \geqslant n^2 - 1 \Rightarrow \boxed{k \geqslant 2n + 2}$$

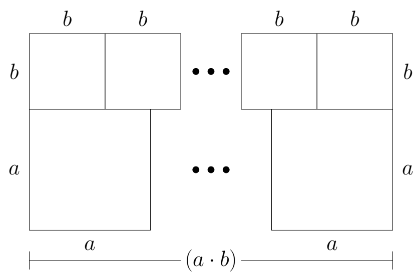
com o exemplo com $2n + 2$ já apresentado. ■

Problema 9. É possível cobrir totalmente um quadrado de lado 1997 com quadrados de lados maiores que 30 e menores que 1997, sem deixar buracos, nem fazer sobreposições e nem sair do tabuleiro?

Solução: Primeiramente, notemos que 1997 é um número primo e, portanto, não poderíamos usar apenas um tipo de quadrados, caso fosse possível.

Pensemos, então, em usar dois tipos de quadrados: os de lados $a > 30$ e $b > 30$, com $a \neq b$.

Daí, na busca de formar um quadrado, tentemos montar primeiramente um retângulo. Para isso, podemos colocar b quadrados de lado a e, em cima, a quadrados de lado b formando, assim, um retângulo no formato $(a + b) \times (a \cdot b)$:



Daí, como 1997 é primo, temos que $ab \neq 1997$. Podemos, então, colocar, ao lado do retângulo acima, um quadrado de lado $(a + b)$ e, assim, procurar soluções para o sistema:

$$\begin{cases} a > 30 \qquad b > 30 \\ ab + a + b = 1997 \end{cases}$$

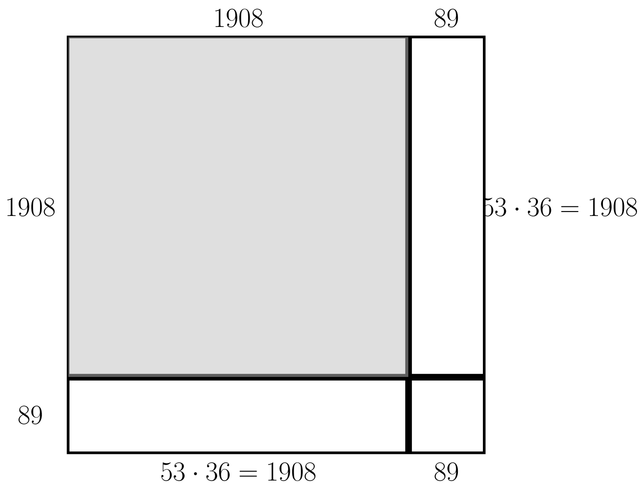
Desenvolvendo algebricamente a equação, podemos concluir que:

$$ab + a + b + 1 = 1998 \Rightarrow (a + 1) \cdot (b + 1) = 1998$$

Fatorando 1998, temos que: $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Daí surge, naturalmente, a solução:

$$\begin{cases} a + 1 = 2 \cdot 3^3 = 54 \Rightarrow \boxed{a = 53} \\ b + 1 = 37 \Rightarrow \boxed{b = 36} \end{cases}$$

Daí, sabendo que $a + b = 89$ e que $1997 - 89 = 1908$, podemos então, usar dois retângulos "laterais" no formato $(a + b) \times (a \cdot b)$, conforme vimos no começo dessa solução, e colocar um "quadradão" de lado 1908 para concluir a cobertura, conforme podemos ver no desenho a seguir:



Resposta: Sim, é possível, conforme apresentado. ■