Uma introdução a Rough Paths

Andrey Chen

Motivação

No estudo de partículas, uma categoria importante é a de movimentos brownianos, que representam um modelo matemático de uma partícula movendo aleatoriamente. Essas trajetórias têm regularidade baixa, que força a introdução de técnicas alternativas como os rough paths.

Vamos começar com um modelo simplificado, onde uma partícula grande se move com uma força conhecida e também no meio de um fluido:

$$dv_t = F_t + dW_t$$

Aqui o termo F_t representa a força, e o termo dW_t representa o gerador de um movimento browniano. É de nosso interesse escrever essa equação de forma integral, mas isso não é possível pois W_t não é regular o suficiente!

- Considere uma função f contínua que é exatamente α-Hölder para $\alpha < \frac{1}{2}$ (e portanto não diferenciável), isto é, $f(a) - f(b) \sim (a-b)^\alpha$. Escreva uma definição análoga a somas de Riemann para a integral $\int_a^b f\,\mathrm{d}f$, e mostre que o limite não existe.
- (Integral de Young) No problema anterior, mostre que se $\alpha > \frac{1}{2}$ então o limite sempre existe.

Vamos passar as próximas seções definindo uma integral que consegue resolver esses problemas.

Regularidade

- Mostre que não existe uma função não-constante e $1+\varepsilon$-Hölder contínua para todo $\varepsilon > 0$.
- Usando de base a função $f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{se } x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \lfloor x \rfloor - x, \text{se } x - \lfloor x \rfloor > \frac{1}{2} \end{cases}$, construa uma função que é contínua mas não é diferenciável em nenhum ponto.
- Modificando a função base do item anterior, construa uma função que é contínua mas não é $\frac{2}{3}$-Hölder contínua em nenhum intervalo. (Dica: $\sqrt{x}$ não é $\frac{2}{3}$-Hölder contínua em qualquer vizinhança do zero.)

Sewing Lemma

Para simular uma integral do tipo $\int_a^b f \mathrm{d}g$, vamos considerar a função mais geral nesse contexto, que é $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Queremos que a função tenha propriedades de integral, mais especificamente a propriedade aditiva, $F(a,b) = F(a,c) + F(c,b)$.

- Mostre que essas propriedades implicam simetria $F(a,b) = -F(b,a)$ e portanto basta definir a função no simplexo $\Delta_2 = \{(s,t)|s < t\}$ ao invés de $\mathbb{R}^2$.
- Mostre que essas propriedades implicam que $F(a,b) = f(b) - f(a)$ para alguma função f.

Como os itens anteriores mostram, a propriedade aditiva remove um grau de liberdade da função; isso não é verdade se afrouxarmos a condição.

Por outro lado, se tomarmos uma função quase aditiva, ela pode ser aproximada por uma função realmente aditiva. Esse é o Sewing Lemma:

- Suponha que F é uma função contínua tal que $|F(a,b) - F(a,c) - F(c,b)| < K(b-a)^{1+\varepsilon}$ para todos $a < c < b$, onde K e $\varepsilon > 0$ são constantes. Mostre que $|F(a,b) - G(a,b)| < \tilde{K}(b-a)^{1+\varepsilon}$
- Mostre que o resultado anterior vale mesmo que F não seja contínua.
- Mostre que sempre há unicidade no Sewing Lemma.

Com isso, podemos repetir a construção da integral de Riemann, e até generalizá-la para a integral de Young:

- Dada uma função f que seja α-Hölder contínua, considere o funcional $F(a,b) = (b-a)f(a)$. Mostre que ele satisfaz as condições do Sewing Lemma e o funcional aditivo que o aproxima é a integral de Riemann. Porque α não pode ser exatamente zero?
- Dadas duas funções f, g que sejam α, β-Hölder contínuas, respectivamente, e supondo que $\alpha + \beta > 1$ considere o funcional $F(a,b) = (g(b) - g(a))f(a)$. Mostre que ele satisfaz as condições do Sewing Lemma. O funcional que o aproxima é a integral de Young.
- Mostre que, nos problemas anteriores, a pontilhação não muda o valor da integral.

Podemos acreditar que uma cota melhor vale, mas isso é falso, como veremos a seguir. (Ao menos uma que preserve unicidade.)

Integrais estocásticas

Vamos usar certas propriedades básicas do movimento browniano.

Uma caracterização do movimento browniano é um processo estocástico W_t (isto é, uma função de um parâmetro aleatório/"dado cósmico" ω e do tempo t) tal que $W_0 = 0$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, isto é, uma variável normal com média 0 e variância $t-s$, e além disso tem incrementos independentes (isto é, $W_{s+a} - W_s$ é independente de $W_s - W_{s-b}$, que representa um processo sem memória)

Usando isso, vamos construir duas integrais diferentes do tipo $\int_a^b W_t \mathrm{d}W_t$, que são análogas à integral de Young e diferem apenas na escolha do ponto intermediário.

- Mostre que o limite a seguir converge com probabilidade 1, e calcule seu valor:
$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{k=0}^{|\mathcal{P}|} W_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$
Essa é chamada a integral de Itô de um processo, e sempre converge para um martingal (processo de média 0)

- Mostre que o limite a seguir converge com probabilidade 1, e calcule seu valor:
$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{k=0}^{|\mathcal{P}|} \frac{(W_{t_{k+1}} + W_{t_k})}{2}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$
Essa é chamada a integral de Stratonovich de um processo, e se comporta de maneira similar a uma integral de Riemann usual.

Rough paths e rough integration

A ideia mais simples para resolver os problemas das seções anteriores é simplesmente **fixar** uma estrutura análoga a tal integral $\int_a^b X \mathrm{d}X$. No que se segue, vamos precisar usar fortemente a linguagem de funções a dois parâmetros, com o que definimos $X_{s,t} := X_t - X_s$ que é uma função aditiva genérica. Daqui em diante X sempre vai representar uma função α-Hölder contínua com $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Definimos uma extensão $\mathbb{X}_{s,t}$ do caminho X como qualquer função a dois parâmetros satisfazendo $\mathbb{X}_{a,b} - \mathbb{X}_{a,c} - \mathbb{X}_{c,b} = X_{a,c}X_{c,b}$, para todos $a < c < b$.

- Dê uma interpretação geométrica para a relação acima (chamada a relação de Chen). Como podemos generalizá-la?

- Suponha que X é um caminho, $\mathbb{X}$ é uma extensão, e Y é outro caminho também $\mathcal{C}^\alpha$. Suponha que, para um caminho $Y' \in \mathcal{C}^\alpha$, tenhamos $Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + O((t-s)^{2\alpha})$ (dizemos que Y é controlado por X, e sua derivada de Gubinelli é Y'). Mostre que o funcional $F(s,t) = Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t}$ satisfaz o Sewing Lemma.