24ª Vingança Olímpica
28ª Semana Olímpica – Salvador, Bahia
28 de janeiro de 2025

- Não escreva mais de uma questão por folha.
- Escreva seu nome em cada folha que usar.
- Para cada problema, numere as páginas de sua solução.

Problema 1. Dizemos que um inteiro m é potência perfeita se existem $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ com $b > 1$ e $m = a^b$.
Determine todos $P \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $P(n)$ é potência perfeita para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Em um triângulo escaleno ABC, sejam I seu incentro e O o seu circuncentro. O ponto T_A é a interseção da tangente externa (diferente de AB) dos exincírculos de ABC relativos a A e B com a tangente externa (diferente de AC) dos exincírculos de ABC relativos a A e C. Defina T_B, T_C de modo análogo. Prove que, se I_A, I_B e I_C são os exincentros de ABC, então os circuncírculos dos triângulos $T_A I_A A$, $T_B I_B B$ e $T_C I_C C$ concorrem em exatamente dois pontos.

Problema 3. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)f(y)) = f(x+y) + f(xy).$$

Problema 4. Dados inteiros positivos a e b, defina os inteiros q e r, onde $0 \leq r < ab$ são tais que $a^2 + b^2 = abq + r$. Mostre que $q + r \leq ab + 1$ e explicite todos os pares (a, b) para os quais ocorre igualdade.

Problema 5. $\mathbb{DONKEY}$ $\mathbb{KONG}$, conhecido carinhosamente como $\mathbb{DK}$, brinca de destruir grafos. Ele pode realizar as seguintes operações:

(i) Destruir um vértice de grau ímpar. Antes de fazer isso, $\mathbb{DK}$ olha para os vizinhos deste vértice e troca a relação entre cada par deles (se eles estavam conectados, eles passam a estar desconectados e vice-versa).

(ii) Escolher um vértice v de grau par, olhar para seus vizinhos e trocar a relação entre cada par deles (note que v não é destruído).

Começando em um grafo G dado, $\mathbb{DK}$ realiza operações até não haver mais arestas. Mostre que a quantidade de vértices no grafo resultante independe das escolhas das operações.

Linguagem: Português *Tempo: 5 horas.*
Cada problema vale 7 pontos.

Aviso: entregaremos um troféu ao nosso competidor favorito.

Comitê de Seleção de Problemas

Vinícius Portella, Gabriel Bastos, João Lemos, Marco D'Emídio, Levi Branco, Fábio Medeiros

Soluções

Problema 1. Dizemos que um inteiro m é potência perfeita se existem $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ com $b > 1$ e $m = a^b$.
Determine todos $P \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $P(n)$ é potência perfeita para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta. $P = Q^k$ para algum inteiro $k > 1$ e $Q \in \mathbb{Z}[x]$.
Solução 1. Comecemos com o seguinte
Lema. Dado um polinômio irredutível $f \in \mathbb{Z}[x]$ não constante, existe um número c tal que, para todo primo $p > c$, se $p|f(n)$ para algum n, então $\nu_p(f(m)) = 1$ para algum $m \in \mathbb{N}$.
Prova. Como f é irredutível, sabemos que $\text{mdc}(f, f') = 1$, e então existem $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ tais que $af + bf' = 1$, ou seja, existem $A, B \in \mathbb{Z}[x]$ e $c \in \mathbb{N}$ com $Af + Bf' = c$. Assim, para qualquer primo $p > c$, se $p|f(n)$, temos que $p \nmid f'(n)$, senão teríamos $p|c$, absurdo. Sabemos que infinitos primos dividem algum elemento de $f(\mathbb{Z})$, e então infinitos primos maiores que c dividem algum elemento de $f(\mathbb{Z})$.
Tome um $p > c$ tal que $p|f(n)$ para algum n. Então, dado $t \in \mathbb{Z}$, note que

$$f(n + tp) = f(n) + tpf'(n) \pmod{p^2}.$$

De fato, se $f(x) = \sum a_i x^i$, segue que

$$\begin{aligned} f(n + tp) = \sum a_i(n + tp)^i &\equiv \sum a_i(n^i + tp \cdot in^{i-1}) \pmod{p^2} \\ &\equiv f(n) + tpf'(n) \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

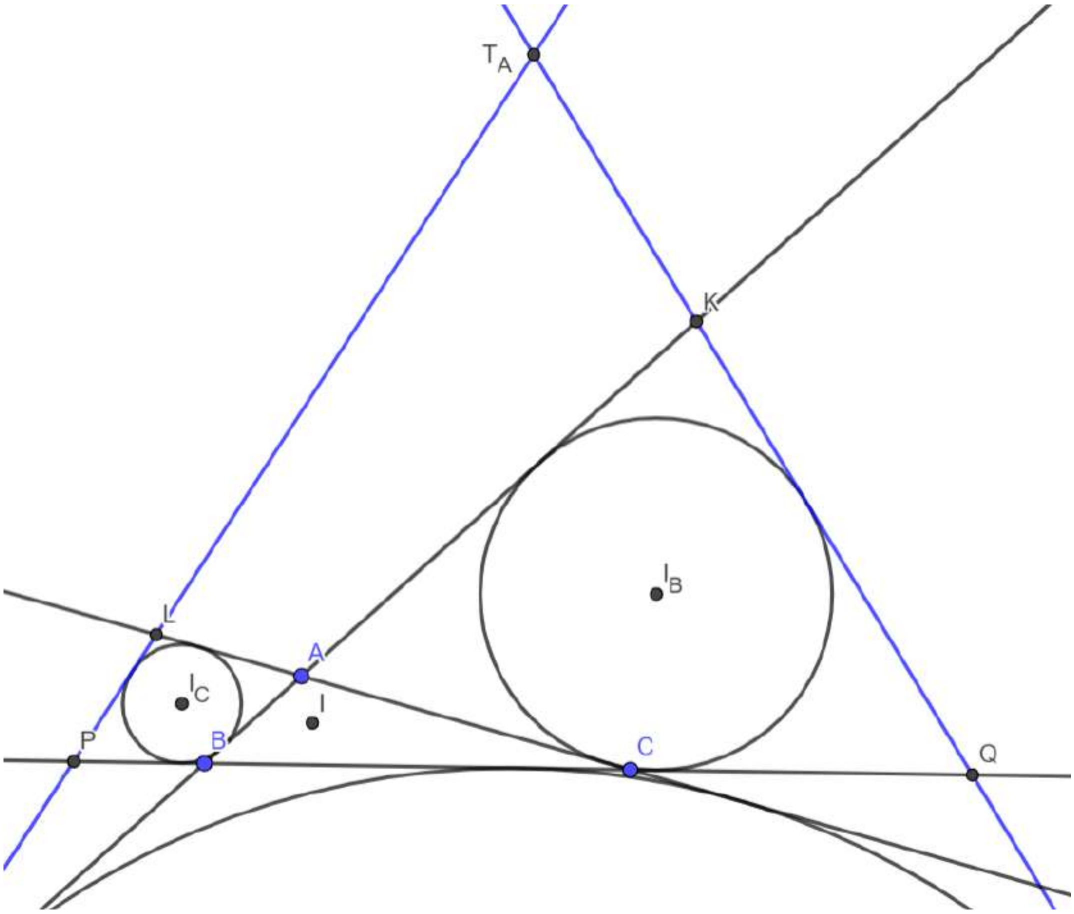
Como foi observado anteriormente, $p \nmid f'(n)$, e então podemos escolher k de modo que $p^2 \nmid f(n + tp)$, mas é claro que $p|f(n + tp)$. Isso prova o lema.
Agora, vamos ao problema. Suponha que P satisfaz a condição do enunciado. Fatore P em polinômios irredutíveis em $\mathbb{Z}[x]$ (possível pelo Lema de Gauß):

$$P = s \cdot \prod_{i=1}^{T} f_i^{\alpha_i},$$

onde $s \in \mathbb{Z}$. Nós vamos provar que $\text{mdc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_T) > 1$. Note que $\text{mdc}(f_i, P/f_i^{\alpha_i}) = 1$, e então, se um primo grande divide $f_i(n)$, ele não divide $(P/f_i^{\alpha_i})(n)$ (o mesmo argumento usado no lema para f, f' vale aqui).
Agora, para cada i, escolha um primo p_i grande e um N_i tal que $\nu_{p_i}(f_i(N_i)) = 1$ (possível pelo Lema) e com $p_i \nmid s$. Podemos escolher os primos de modo que eles sejam dois a dois distintos, ou seja, $i \neq j \Longrightarrow p_i \neq p_j$. Então tome N tal que $N \equiv N_i \pmod{p_i^2}$ para todo i (possível pelo Teorema Chinês dos Restos, pois $p_i \neq p_j$ são primos). Então temos que $\nu_{p_i}(f_i(N)) = 1$ e $p_i \nmid (P/f_i^{\alpha_i})(N)$, de modo que $\nu_{p_i}(P(N)) = \alpha_i$. Como existe $k > 1$ tal que $P(N)$ é potência k-ésima perfeita, devemos ter que $k|\alpha_i$ para todo i, e então $\prod_{i=1}^{T} f_i^{\alpha_i}$ é potência k-ésima de um polinômio. Logo, s também deve ser uma potência k-ésima, pois $P(N)$ é potência k-ésima. Isso termina o problema.

Problema 2. Em um triângulo escaleno ABC, sejam I seu incentro e O o seu circuncentro. O ponto T_A é a interseção da tangente externa (diferente de AB) dos exincírculos de ABC relativos a A e B com a tangente externa (diferente de AC) dos exincírculos de ABC relativos a A e C. Defina T_B, T_C de modo análogo. Prove que, se I_A, I_B e I_C são os exincentros de ABC, então os circuncírculos dos triângulos T_AI_AA, T_BI_BB e T_CI_CC concorrem em exatamente dois pontos.

Solução 1. Assuma que ABC é escaleno, senão uma simples simetria resolve o problema. Vamos usar baricêntricas, e, para isso, é preciso de uma observação sintética:



A reta PL é segunda tangente externa de (I_C) e (I_A) e KQ é a segunda tangente externa de (I_B) e (I_A). Então $PB = BA$ e BL é bisstriz externa de $\angle ABC$. De fato B e L são os centros das homotetias que levam (I_C) em (I_A), e daí, por simetria, $PB = AB$. Então P e L são facilmente calculáveis em baricêntricas, assim como K e Q. Mais precisamente,

$$P = (0\colon c+a\colon -c), \qquad Q = (0\colon -b\colon b+a),$$
$$L = (a\colon 0\colon -c), \qquad K = (a\colon -b\colon 0).$$

A partir de agora vira pura álgebra.
Vamos usar as seguintes identidades:

$$S^2 = a^2S_A + S_{BC} = (bc)^2 - S_A^2,$$
$$b^2S_B + c^2S_C = a^2S_A + 2S_{BC},$$

onde $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$, etc., e S é o dobro da área de ABC.
Se $T_A = (t : y : z)$, temos que

$$\begin{vmatrix} 0 & c+a & -c \\ a & 0 & -c \\ t & y & z \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 0 & -b & b+a \\ t & y & z \\ a & -b & 0 \end{vmatrix},$$

ou

$$
\begin{aligned}
-tc(c+a) - yac - za(c+a) &= 0,\\
-tb(b+a) - ya(b+a) - zab &= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos ver quanto é $t\colon z$. Multiplique a primeira equação por $b+a$, a segunda por c e subtraia as duas:

$$tc(b+a)(a-b+c) = -za^2(a+b+c),$$

então

$$t\colon z = \frac{-a^2(a+b+c)}{c(b+a)(a-b+c)}.$$

Agora, vamos calcular $t\colon y$. Multiplique a primeira equação por b, a segunda por $c+a$ e subtraia as duas:

$$tb(c+a)(a+b-c) = -ya^2(a+b+c),$$

e então

$$t\colon y = \frac{-a^2(a+b+c)}{b(c+a)(a+b-c)}.$$

Disso tiramos que

$$T_A = (t\colon y\colon z) = \Big(-a^2(a+b+c) \colon b(c+a)(a+b-c) \colon c(b+a)(a-b+c) \Big).$$

Agora, seja

$$-\left(\sum a^2yz\right) + (u_Ax + v_Ay + w_Az)(x+y+z) = 0$$

a equação do circuncírculo de T_AI_AA. Vejamos as informações que temos (note que $I_A = (-a\colon b\colon c)$):

$$
\begin{aligned}
&u_A = 0 \quad \text{pois } A \text{ está no círculo},\\
&abc + v_Ab + w_Ac = 0 \quad \text{pois } I_A \text{ está no círculo}.
\end{aligned}
$$

Por fim, devemos substituir os valores de T_A para obtermos a última informação. Veja que

$$
\begin{aligned}
-a^2(a+b+c) + b(c+a)(a+b-c) + c(b+a)(a-b+c) &= a(a+b+c)(-a+b+c) - 2abc\\
&= a((b+c)^2 - a^2 - 2bc)\\
&= a(b^2+c^2-a^2)\\
&= 2aS_A.
\end{aligned}
$$

Ademais,

$$
\begin{aligned}
a^2 \cdot b(c+a)(a+b-c) \cdot c(b+a)(a-b+c) &= -2a^2bc \cdot (b+a)(c+a)(S_A - bc),\\
b^2 \cdot c(b+a)(a-b+c) \cdot -a^2(a+b+c) &= -2a^2bc \cdot b(b+a)(S_B + ca),\\
c^2 \cdot -a^2(a+b+c) \cdot b(c+a)(a+b-c) &= -2a^2bc \cdot c(c+a)(S_C + ab).
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
b(b+a)(S_B+ca) + c(c+a)(S_C+ab) &= b^2S_B + ab^2c + abS_B + a^2bc + c^2S_C + abc^2 + acS_C + a^2bc\\
&= a^2S_A + 2S_{BC} + abS_B + acS_C + abc(2a+b+c) = K,
\end{aligned}
$$

e que

$$\begin{aligned}(b+a)(c+a)(S_A-bc)+K &= a^2S_A - a^2bc + abS_A - ab^2c + acS_A - abc^2 + bcS_A - (bc)^2 + K\\ &= 2S^2 + ab(S_A+S_B) + ac(S_A+S_C) + a^2bc + bcS_A - (bc)^2\\ &= 2S^2 + abc(a+b+c) + bcS_A - (bc)^2\\ &= S^2 - S_A^2 + abc(a+b+c) + bcS_A\\ &= S^2 - S_A^2 + bc(S_A + a^2 + ab + ac)\\ &= S^2 - S_A^2 + bc\left(\frac{(a+b+c)^2}{2} - bc\right)\\ &= bc\frac{(a+b+c)^2}{2} - 2S_A^2.\end{aligned}$$

Portanto, a informação que obtemos ao colocar $(t\colon y\colon z)$ na equação do círculo é

$$2a^2bc\left(bc\frac{(a+b+c)^2}{2} - 2S_A^2\right) + 2aS_A(v_Ab(c+a)(a+b-c) + w_Ac(b+a)(a-b+c)) = 0.$$

Sabemos também que $v_Ab + w_Ac = -abc$. Logo, seja $v_Ab = (x-abc)/2$, $w_Ac = -(x+abc)/2$. Vamos dividir a equação acima por a e colocar v_Ab e w_Ac em função de x:

$$abc(bc(a+b+c)^2 - 4S_A^2) + S_A((x-abc)(c+a)(a+b-c) - (x+abc)(b+a)(a-b+c)) = 0.$$

Agora, vamos isolar x. O coeficiente em x é

$$S_A((c+a)(a+b-c)-(b+a)(a-b+c)) = S_A(a^2-c^2+ab+bc-a^2+b^2-ac-bc) = S_A(b-c)(a+b+c).$$

O termo independente é

$$\begin{aligned}&abc\left(bc(a+b+c)^2 - 4S_A^2 - S_A((c+a)(a+b-c) + (b+a)(a-b+c))\right) =\\ &abc\left(bc(a+b+c)^2 - S_A(4S_A + a^2 - b^2 - c^2 + a^2 + ab + ac + 2bc)\right) =\\ &abc\left(bc(a+b+c)^2 - S_A(2S_A + a^2 + ab + ac + 2bc)\right) =\\ &abc\left(bc(a+b+c)^2 - S_A(b^2 + c^2 + 2bc + a(b+c))\right) =\\ &abc(a+b+c)\left(bc(a+b+c) - S_A(b+c)\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$xS_A(b-c) = abc(bc(a+b+c) - S_A(b+c)).$$

Agora vamos calcular v_A:

$$\begin{aligned}v_A &= \frac{x}{2b} - \frac{ac}{2} = \frac{ac}{2}\left(\frac{bc(a+b+c) - S_A(b+c)}{S_A(b-c)} - 1\right) = \frac{ac}{2}\left(\frac{bc(a+b+c) - 2S_Ab}{S_A(b-c)}\right)\\ &= \frac{abc}{2}\cdot\frac{c^2+ac+bc-2S_A}{S_A(b-c)} = \frac{abc}{2}\cdot\frac{a^2-b^2+c(a+b)}{S_A(b-c)} = \frac{abc(a+b)(a-b+c)}{2S_A(b-c)}.\end{aligned}$$

Similarmente,

$$w_A = \frac{abc(a+c)(a+b-c)}{2S_A(c-b)}.$$

Como todos os termos $u_A, v_A, w_A, u_B, v_B, w_B, u_C, v_C, w_C$ vão ter um fator $abc/2$, vamos dividir todos por $abc/2$ por simplicidade (a partir de agora todas as equações serão homogêneas nesses valores). Vamos ter

$$v_A = \frac{(a+b)(a-b+c)}{S_A(b-c)}, \quad w_A = \frac{(a+c)(a+b-c)}{S_A(c-b)}.$$

Do mesmo modo,

$$u_B = \frac{(b+a)(b+c-a)}{S_B(a-c)}, \quad w_B = \frac{(b+c)(b-c+a)}{S_B(c-a)},$$

e

$$u_C = \frac{(c+a)(c-a+b)}{S_C(a-b)}, \quad v_C = \frac{(c+b)(c+a-b)}{S_C(b-a)}.$$

O eixo radical de $(T_A I_A A)$ e $(T_B I_B B)$ é

$$(u_A - u_B)x + (v_A - v_B)y + (w_A - w_B)z = 0,$$

enquanto o de $(T_A I_A A)$ e $(T_C I_C C)$ é

$$(u_A - u_C)x + (v_A - v_C)y + (w_A - w_C)z = 0.$$

Para que essas retas coincidam, basta que $(u_A - u_B : v_A - v_B : w_A - w_B) = (u_A - u_C : v_A - v_C : w_A - w_C)$. Então, vamos verificar que

$$\frac{u_B}{u_C} = \frac{v_A}{v_A - v_C} = \frac{w_A - w_B}{w_A}.$$

Mas

$$\frac{u_B}{u_C} = \frac{S_C}{S_B} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

Temos também que

$$\frac{v_A - v_C}{v_A} = 1 - \frac{v_C}{v_A} = 1 - \frac{S_A}{S_C} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2}.$$

Basta que

$$\frac{S_B}{S_C} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} = 1 - \frac{S_A}{S_C} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2},$$

ou

$$S_B(a^2 - c^2) = S_C(a^2 - b^2) + S_A(b^2 - c^2),$$

ou melhor:

$$2S_A(b^2 - c^2) + 2S_B(c^2 - a^2) + 2S_C(a^2 - b^2) = 0.$$

Sendo $A = a^2, B = b^2, C = c^2$, temos que $2S_A = B + C - A$, etc.. Logo, basta que

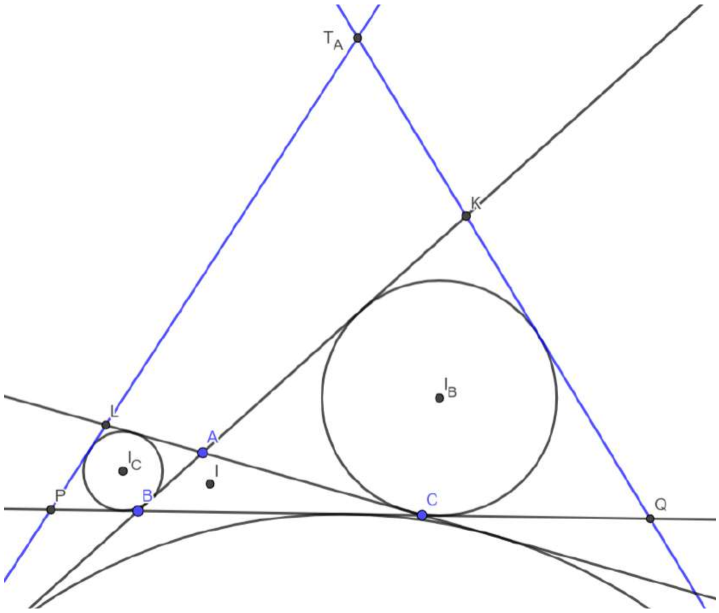
$$(-A + B + C)(B - C) + (A - B + C)(C - A) + (A + B - C)(A - B) = 0,$$

ou então

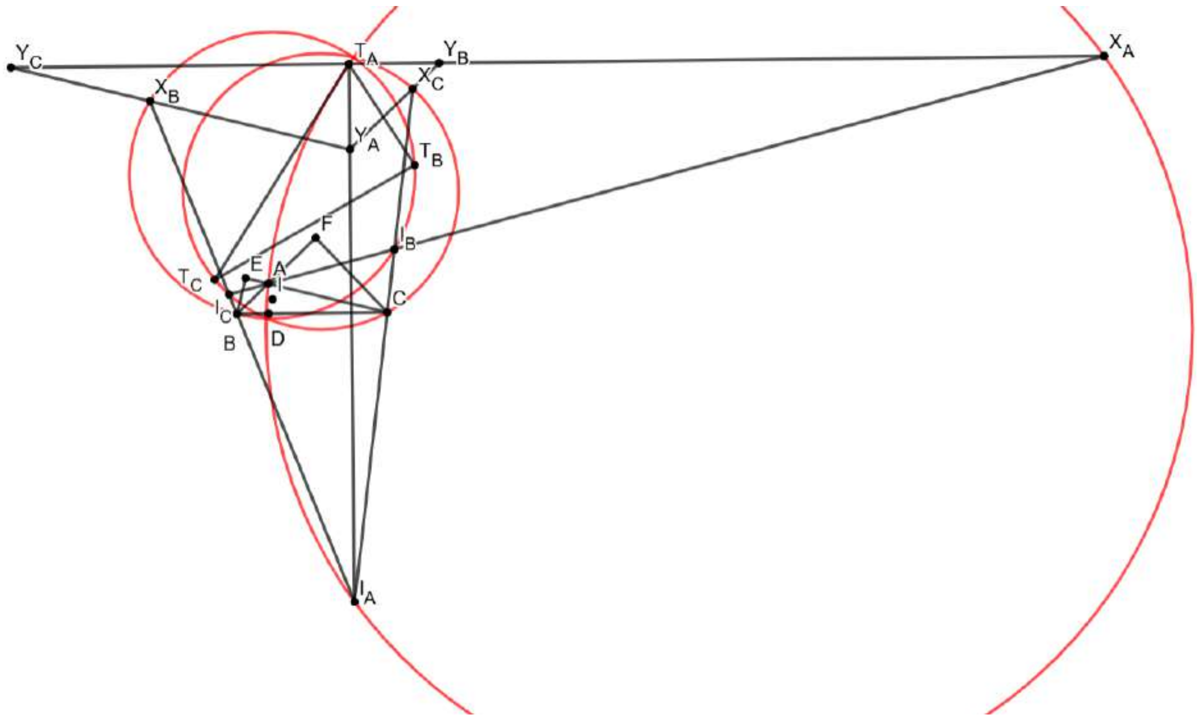
$$-A(B - C) + (B^2 - C^2) - B(C - A) + (C^2 - A^2) - C(A - B) + (A^2 - B^2) = 0,$$

o que é verdade. Para a razão $\frac{w_A - w_B}{w_A}$ basta fazer uma conta análoga.

Solução 2. Vamos começar revendo a figura da solução anterior. Assuma que o triângulo ABC satisfaz $\angle A > 90°$:



Já vimos que $BA = BP$, e, pela simetria das retas LP e LA em relação a I_CI_A, temos também $LP = LA$. Logo, $\angle LPB = \angle LAB = 180° - \angle BAC$. Sendo D o pé da perpendicular de A a BC, F o pé da perpendicular de C a AB, temos que $\angle FDC = \angle FAC = 180° - \angle BAC = \angle CPT_A$. Assim, $T_AL \parallel DF$. Com resultados análogos obtemos que $T_AT_BT_C$ e homotético a DEF, o triângulo órtico de ABC.



Ademais, como $T_AP = T_AQ$ pois $\angle T_APQ = \angle T_AQP$, e T_AI_A é bissetriz de $\angle PT_AQ$ (T_AP e T_AQ são tangentes ao A-exincírculo), segue que $T_AI_A \perp BC$.

Sejam Ω_A, Ω_B e Ω_C os circuncírculos de AT_AI_A, BT_BI_B e CT_CI_C, respectivamente. Seja $\{X_A, A\} = I_BI_C \cap \Omega_A$, $\{X_B, B\} = I_CI_A \cap \Omega_B$ e $\{X_C, C\} = I_AI_B \cap \Omega_C$. Como $AI_A \perp I_BI_C$, X_A é o antípoda de I_A em Ω_A, e temos resultados similares para X_B e X_C.

Note que, se A' é a interseção de I_BI_C com BC e A^* é a interseção de I_AT_A com BC, como $\angle A'A^*I_A = 90° = \angle A'AI_A$, temos que $\angle AA'B = \angle AI_AT_A = \angle T_AX_AA$. Daí segue que $T_AX_A \parallel BC$. Do mesmo modo, $T_BX_B \parallel CA, T_CX_C \parallel AB$.

Seja Y_A a interseção de X_BT_B com X_CT_C, e defina Y_B, Y_C de modo análogo. Como $T_AT_C \parallel DF, T_CT_B \parallel EF$ e $T_CY_A \parallel FA$, obtemos que T_CY_A é bissetriz interna de $\angle T_AT_CT_B$ já que AF é bissetriz interna de $\angle DFE$. Do mesmo modo, T_BY_A é bissetriz interna de $\angle T_AT_BT_C$, e concluímos que Y_A é o incentro de $T_AT_BT_C \implies Y_A \in T_AI_A$. Note então que Y_AI_A, Y_BI_B, Y_CI_C concorrem, pois as perpendiculares de I_A, I_B, I_C a BC, CA, AB concorrem. Assim, $I_AI_BI_C$ e $Y_AY_BY_C$ são triângulos perspectivos, e então $Y_AY_B \cap I_AI_B$, $Y_BY_C \cap I_BI_C$, $Y_CY_A \cap I_CI_A$ são colineares, ou seja, X_A, X_B, X_C são colineares.

Olhando para o quadrilátero completo formado pelos pontos $I_A, X_A, I_B, X_B, I_C, X_C$, concluímos que os pontos médios de I_AX_A, I_BX_B, I_CX_C são colineares (reta de Gauß), mas esses pontos médios são justamente os centros de $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$.

Logo, para mostrar que esses círculos são coaxiais, basta encontrar um ponto que está no eixo radical de quaisquer dois deles.

Mas $II_A \cdot IA = II_B \cdot IB = II_C \cdot IC$, e então I está neste eixo radical. Isso finaliza o problema.

Problema 3. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)f(y)) = f(x+y) + f(xy). \tag{$*$}$$

Resposta. $x \mapsto x+1$, $x \mapsto -x-1$ e $x \mapsto 0$ são as únicas soluções.
Solução. A principal ideia é mostrar que f é injetiva ou f é constante. Assuma que existam $a \neq b$ reais com $f(a) = f(b)$. Note que, fazendo $x \leftarrow 1$ e $y \leftarrow a, y \leftarrow b$ em $(*)$, obtemos

$$f(a+1) + f(a) = f(f(a)f(1)) = f(f(b)f(1)) = f(b+1) + f(b),$$

e então $f(a) = f(b) \implies f(a+1) = f(b+1)$. Agora, fazendo $x \leftarrow -1$ e $y \leftarrow a+1$, $y \leftarrow b+1$, obtemos que

$$f(a) + f(-a-1) = f(f(a+1)f(-1)) = f(f(b+1)f(-1)) = f(b) + f(-b-1).$$

Logo, $f(a) = f(b) \implies f(-a-1) = f(-b-1) \implies f(-a) = f(-b)$. Fazendo $x \leftarrow -1$ e $y \leftarrow a$, $y \leftarrow b$, obtemos

$$f(a-1) + f(-a) = f(f(a)f(-1)) = f(f(b)f(-1)) = f(b-1) + f(-b),$$

e então $f(a) = f(b) \implies f(a-1) = f(b-1)$. Concluímos então que $f(a) = f(b) \implies f(a+n) = f(b+n)$ para todo n inteiro. Agora, faça $x \leftarrow n$, $n \in \mathbb{Z}$, e $y \leftarrow a$, $y \leftarrow b$ em $(*)$ para obter

$$f(a+n) + f(an) = f(f(a)f(n)) = f(f(b)f(n)) = f(b+n) + f(bn),$$

de modo que $f(a) = f(b) \implies f(an) = f(bn)$ para todo n inteiro. Agora, note que

$$f(0) + f(-a^2) = f(f(a)f(-a)) = f(f(b)f(-b)) = f(0) + f(-b^2),$$

e então $f(a) = f(b) \implies f(-a^2) = f(-b^2) \implies f(a^2) = f(b^2)$. Por fim, temos que

$$f(a-b) + f(-ab) = f(f(a)f(-b)) = f(f(b)f(-a)) = f(b-a) + f(-ab).$$

Assim, $f(a) = f(b) \implies f(a-b) = f(b-a)$.
Logo, vamos olhar para as soluções de $f(x) = f(-x)$. Já vimos que, se a única solução for $x = 0$, então f é injetiva. Suponha que haja uma solução $x \neq 0$, e chame-a de t.
Note que, para n inteiro,

$$f(t+n+x) + f(tx+nx) = f(f(t+n)f(x)) = f(f(-t+n)f(x)) = f(-t+n+x) + f(-tx+nx).$$

Vamos escolher x com $t+n+x = -tx+nx \iff x(n-t-1) = t+n$, de modo que $f(tx+nx) = f(-t+n+x)$. Daí obtemos que

$$f(x(n+t-1)+t-n) = f(x(1-t-n)-t+n).$$

Vamos tomar $n = 1$, de modo que $x = -1 - \frac{1}{t}$. Daí $x(n+t-1)+t-n = xt+t-1 = -2$. Ou seja, $f(2) = f(-2)$. Daí $f(n+2) = f(n-2)$ para todo n inteiro.
Em particular, $f(4) = f(0)$, e então

$$f(x) + f(0) = f(f(x)f(0)) = f(f(x)f(4)) = f(x+4) + f(4x).$$

Disso, surge a ideia de mostrar que $f(1) = f(0)$, pois a conta acima com 1 no lugar do 4 diria que $f(x+1) = f(0)$ para todo x, e então f é constante.
Note que

$$f(x+n+2) + f(nx+2x) = f(f(x)f(n+2)) = f(f(x)f(n-2)) = f(x+n-2) + f(nx-2x).$$

Fazendo $nx+2x = x+n-2 \iff x(n+1) = n-2$, obtemos $f(x+n+2) = f(nx-2x)$, e então

$$f(x(3-n)+n+2) = f(x(n-3)-n-2).$$

Mas $x(n-3)-n-2=\frac{(n-3)(n-2)}{n+1}-n-2=-4\frac{(n-2)}{n+1}+4$. Então, se $n=3$, obtemos que $f(3)=f(-3)$, e então $f(n+3)=f(n-3)$, e como $f(n+2)=f(n-2)$ conclui-se que $f(n+1)=f(n-1)$. Temos que

$$f(-x)+f(x-1)=f(f(x)f(-1))=f(f(x)f(1))=f(x+1)+f(x).$$

Tomando $x=-1/2$ temos que $-x=x+1$, de modo que $f(-1-1/2)=f(-1/2) \Longrightarrow f(1/2)=f(-1/2)=f(3/2)$. Portanto,

$$f(-x/2)+f(x-1/2)=f(x+1/2)+f(x/2)$$

Então, fazendo $x=1/2$, obtemos que $f(1)=f(0) \Longleftrightarrow f(1/4)=f(-1/4)$. Mas sabemos que

$$f(nx)+f(n+x)=f((n+2)x)+f(n+x+2).$$

Fazendo $x=n/(n+1)$ temos $n+x=(n+2)x$, e então

$$f\left(\frac{n^2}{n+1}\right)=f\left(n+2+\frac{n}{n+1}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\right)=f\left(1+\frac{n}{n+1}\right) \Longrightarrow f\left(2-\frac{2}{n+1}\right)=f\left(-2+\frac{2}{n+1}\right).$$

Então, se $x=2-\frac{2}{n+1}$,

$$f(x-2)+f(-2x)=f(-x+2)+f(-2x),$$

e então $f(x-2)=f(-x+2)$, e $x-2=\frac{-2}{n+1}$. $n=7$ diz que $f(1/4)=f(-1/4)$, como desejado.
Agora sabemos que f é injetiva ou constante. Suponha que ela é injetiva. Então seja $f(0)=c$. Note que $f(c^2)=2c$, $f(f(c^2)f(0))=f(c^2)+c=3c=f(2c^2)$, e $f(f(2c^2)f(0))=f(2c^2)+c=4c=f(3c^2)$, e $f(4c^2)=5c$. Ademais, $f(f(c^2)f(c^2))=f(2c^2)+f(c^4)=f(4c^2)=5c \Longrightarrow f(c^4)=2c=f(c^2)$. Então, como f é injetiva, $c^4=c^2$.
Note que $f(0)=0 \Longrightarrow f(x)=0$ para todo x. Assim $f(0)\neq 0$. Mas, se f é solução para o problema, $-f$ também é. Logo, podemos supor que $f(0)>0$. Daí $f(0)=1$.
Assim,

$$f(f(x))=f(x)+1,$$

e $f(f(x)f(-x))=f(-x^2)+1=f(f(-x^2))$, então $f(x)f(-x)=f(-x^2)$. Então $f(1)f(-1)=f(-1)$, e como $f(1)\neq 1=f(0)$ temos $f(-1)=0$. Daí $1=f(0)=f(f(x)f(-1))=f(x-1)+f(-x)$, e $f(f(-x)f(x-1))=f(x(1-x))$, e então $f(-x)f(x-1)=x(1-x)$. Trocando $f(-x)=1-f(x-1)$ segue que $f(x-1)(1-f(x-1))=x(1-x)$. Logo, $\{f(x-1),f(-x)\}=\{x,1-x\}$. Concluímos que f é sobrejetora, e então $f(f(x))=f(x)+1$ vira $f(x)=x+1$.

Problema 4. Dados inteiros positivos a e b, defina os inteiros q e r, onde $0 \le r < ab$ são tais que $a^2 + b^2 = abq + r$. Mostre que $q + r \le ab + 1$ e explicite todos os pares (a, b) para os quais ocorre igualdade.

Solução. Como $a^2 + b^2 \ge 2ab$, devemos ter $q \ge 2$. Vamos fazer indução em $a + b$ e na seguinte afirmação: Dados inteiros positivos a e b, temos que

$$\left\lfloor \frac{(a-b)^2}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(a-b)^2}{ab-1} \right\rfloor$$

se $ab - 1 \nmid (a-b)^2$ ou $a = b$, e

$$\left\lfloor \frac{(a-b)^2}{ab} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{(a-b)^2}{ab-1} \right\rfloor$$

caso $ab - 1 | (a-b)^2$ e $a \ne b$.
O caso base $a + b = 2$ é trivial, pois $a = b = 1$. Para o passo indutivo, se $a = b$, temos $r = 0$ e $q = 2$, e é claro que $2 + 0 \le a^2 + 1$ nesse caso. Assim, podemos supor, sem perdas, que $a > b$.
Escreva $a = bx + y$, onde x, y são inteiros com $0 \le y < b$. Note que

$$q = \left\lfloor \frac{a^2 + b^2}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right\rfloor = x + \left\lfloor \frac{y}{b} + \frac{b}{bx + y} \right\rfloor \in \{x, x+1\}.$$

Vamos dividir em dois casos.
Caso 1. $q = x + 1$, ou $y/b + b/(bx + y) \ge 1$.
Note que $r + q = a^2 + b^2 - abq + q = (bx + y)^2 + b^2 - (bx + y)b(x + 1) + (x + 1)$. Então devemos provar que

$$\begin{aligned}
&(bx+y)^2 + b^2 - (bx+y)b(x+1) + (x+1) \le (bx+y)b + 1 \\
\iff &b^2x^2 + 2bxy + y^2 + b^2 - b^2x^2 - bxy - b^2x - by + x \le b^2x + by \\
\iff &bxy + y^2 + b^2 + x \le 2b^2x + 2by \\
\iff &(b-y)^2 \le x(2b^2 - by - 1).
\end{aligned}$$

Como $x \ge 1$, basta que

$$2b^2 - by - 1 \ge b^2 + y^2 - 2by \iff b^2 - 1 \ge y^2 - by.$$

Mas $0 \le y < b$, e então isso é verdade.
Caso 2. $q = x$, ou $y/b + b/(bx + y) < 1$.
Agora nós temos

$$r + q = a^2 + b^2 - abq + q = (bx + y)^2 + b^2 - (bx + y)bx + x,$$

então devemos provar que

$$\begin{aligned}
&(bx+y)^2 + b^2 - (bx+y)bx + x \le (bx+y)b + 1 \\
\iff &b^2x^2 + 2bxy + y^2 + b^2 - b^2x^2 - bxy + x \le b^2x + by + 1 \\
\iff &bxy + y^2 + b^2 + x \le b^2x + by + 1 \\
\iff &b^2 + y^2 - by - 1 \le x(b^2 - by - 1) \\
\iff &x \ge \frac{b^2 + y^2 - by - 1}{b(b-y) - 1}.
\end{aligned}$$

Mas sabemos, por hipótese, que

$$\begin{aligned}
\frac{y}{b} + \frac{b}{bx+y} < 1 \iff &\frac{y}{b} < \frac{bx + y - b}{bx + y} \\
\iff &bxy + y^2 < b^2x + by - b^2 \\
\iff &b^2 + y^2 - by < x(b^2 - by) \\
\iff &x > \frac{b^2 + y^2 - by}{b(b-y)}.
\end{aligned}$$

Então devemos provar que

$$x > \frac{b^2 + y^2 - by}{b(b-y)} \Longrightarrow x \geq \frac{b^2 + y^2 - by - 1}{b(b-y) - 1}.$$

Seja $b - y = c$. Note que $b^2 + y^2 - by = b^2 + y(b-y) = b^2 - bc + c^2$ e $b(b-y) = bc$, então basta

$$x > \frac{b^2 + c^2 - bc}{bc} \Longrightarrow x \geq \frac{b^2 + c^2 - bc - 1}{bc - 1},$$

ou

$$x - 1 > \frac{(b-c)^2}{bc} \Longrightarrow x - 1 \geq \frac{(b-c)^2}{bc - 1}.$$

Mas isso segue diretamente da indução, pois $b - y = c < a$. Isso mostra que $q + r \leq ab + 1$. Vamos provar o segundo resultado enunciado na indução. Note que

$$(a-b)^2 = ab(q-2) + r \quad \text{e} \quad (a-b)^2 = (ab-1)(q-2) + (q - 2 + r).$$

Como $q - 2 + r \leq ab - 1$, caso $ab - 1 \nmid (a-b)^2$, devemos ter obrigatoriamente $q - 2 + r < ab - 1$, de modo que $q - 2 + r$ é o resto de $(a-b)^2$ na divisão por $ab - 1$. Então

$$q - 2 = \left\lfloor \frac{(a-b)^2}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(a-b)^2}{ab-1} \right\rfloor.$$

Se $ab - 1 | (a-b)^2$, como $q - 2 + r > 0$, pois $q \geq 2$ e $r \geq 0$, mas as duas igualdades não podem ocorrer pois estamos assumindo $a \neq b$, devemos ter $q - 2 + r = ab - 1$, de modo que

$$q - 1 = \left\lfloor \frac{(a-b)^2}{ab} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{(a-b)^2}{ab-1} \right\rfloor.$$

Isso completa a indução, e, portanto, finaliza a demonstração de que $q + r \leq ab + 1$.
Agora, devemos encontrar os casos de igualdade. Pelo o que foi visto acima, teremos igualdade se e só se $ab - 1 | (a-b)^2$ e $a \neq b$ ou $a = b = 1$. Suponha $a > b > 1$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(a-b)^2 = k(ab-1) \Longleftrightarrow a^2 - a(2b + kb) + b^2 + k = 0.$$

É claro que $k < a$, pois, senão, $a^2 - k(ab-1) < 0$ e $b^2 - 2ab < 0$. Sendo a' a segunda raiz de

$$x^2 - x(2b + kb) + b^2 + k = 0,$$

temos que $a' = 2b + kb - a \in \mathbb{Z}$ e $aa' = b^2 + k$, e então $a' \leq b$, senão $aa' \geq a(b+1) > b^2 + k$, pois $ab > b^2$ e $a > k$, absurdo. Caso $a' = b$, teremos $a = (k+1)b$, e então $aa' = b^2(k+1) = b^2 + k$, ou $k = b^2 k \Longleftrightarrow b = 1$, absurdo por hipótese. Logo, $a' < b$.
Assim, enquanto $\min(a, b) > 1$ e $a \neq b$, há uma solução com $\min(a, b)$ menor. Assim, em algum momento, vamos encontrar uma solução da forma $x, 1$. Logo, todas as soluções podem ser geradas através do pulo de Vieta, iniciando com um par $x, 1$. Nesse caso $k = x - 1$, e, de uma solução $a > b$ para

$$(a-b)^2 = (x-1)(ab-1),$$

passamos para a solução $(a^2 + x - 1)/b > a$. Com isso, podemos deduzir todos os pares (a, b) para os quais há igualdade em $q + r \leq ab + 1$.

Problema 5. $\mathbb{DONKEY}$ $\mathbb{KONG}$, conhecido carinhosamente como $\mathbb{DK}$, brinca de destruir grafos. Ele pode realizar as seguintes operações:

(i) Destruir um vértice de grau ímpar. Antes de fazer isso, $\mathbb{DK}$ olha para os vizinhos deste vértice e troca a relação entre cada par deles (se eles estavam conectados, eles passam a estar desconectados e vice-versa).

(ii) Escolher um vértice v de grau par, olhar para seus vizinhos e trocar a relação entre cada par deles (note que v não é destruído).

Começando em um grafo G dado, $\mathbb{DK}$ realiza operações até não haver mais arestas. Mostre que a quantidade de vértices no grafo resultante independe das escolhas das operações.

Solução. Vamos provar que o número de maneiras de dividir os vértices do grafo G (em qualquer momento do processo) em duas classes de modo que cada vértice tenha um número par de vizinhos em sua própria classe é invariante. Vamos dizer que uma divisão (A, B) dos vértices do grafo é boa se satisfaz essa condição.

Dada uma divisão boa (A, B), suponha que usemos a operação (i) no vértice $v \in A$. Sejam $u_1, \ldots, u_{2k} \in A$ os vizinhos de v em A e $w_1, \ldots, w_{2t+1} \in B$ os vizinhos de v em B. Ao realizar (i), vejamos que $(A \backslash \{v\}, B)$ é boa no novo grafo. Basta verificar que os vizinhos de v possuem uma quantidade par de vizinhos, o que é verdade, pois $|\{v, u_1, \ldots, u_{2k}\}|$ e $|\{w_1, \ldots, w_{2t+1}\}|$ são ímpares.

Agora, dada uma divisão (A, B) boa do novo grafo (obtido ao realizar (i) em v), vamos recuperar exatamente uma divisão boa do grafo antigo, que será $(A \cup \{v\}, B)$ ou $(A, B \cup \{v\})$. Sem perdas, v possui uma quantidade ímpar de vizinhos em B. Então $(A, B \cup \{v\})$ não é boa no grafo antigo (pois v possui grau ímpar em sua classe), mas $(A \cup \{v\}, B)$ é boa (mesmo argumento utilizado no parágrafo passado). Assim, (i) mantém o nosso invariante.

Agora temos de verificar que (ii) também mantém o invariante. Tome uma divisão boa (A, B) do grafo antes de realizar (ii) em v. Suponha que $v \in A$. Vejamos que $(A \backslash \{v\}, B \cup \{v\})$ é boa no novo grafo. De fato, se $u_1, \ldots, u_{2k} \in A$ são os vizinhos de v em A e $w_1, \ldots, w_{2t} \in B$ são os vizinhos de v em B, ao realizar (ii) em v, a paridade de vizinhos de u_i em $\{u_1, \ldots, u_{2k}\}$ muda, assim como a paridade de vizinhos de w_i em $\{w_1, \ldots, w_{2t}\}$ muda. Logo, ao trocar v de A para B, trocamos novamente a paridade de vizinhos de cada u_i e w_i nas classes, e então mudamos a paridade duas vezes, e então todas as paridades continuam sendo par.

Agora, dada uma divisão boa (A, B) após realizar (ii) em v, vamos recuperar exatamente uma divisão boa no grafo antigo. Supondo que $v \in B$, vejamos que $(A \cup \{v\}, B \backslash \{v\})$ é boa no grafo antigo, mas (A, B) não é boa no grafo antigo. A verificação é similar à feita no parágrafo anterior.

Assim, é fácil verificar que estabelecemos uma bijeção entre as divisões boas de um grafo e as divisões boas após realizar uma operação. Isso mostra o invariante.

Se obtivermos um grafo sem arestas no fim, esse número será 2^k, em que k é o número de pontos no fim do processo. Se fizermos outras operações no grafo inicial e, no fim, houver k' pontos sem arestas entre eles, deveremos ter $2^k = 2^{k'}$, e então $k = k'$, como desejado.