Pequenos casos, grandes soluções

Carlos Shine

Estudar casos particulares, especialmente os casos pequenos, costuma ajudar a resolver problemas. Normalmente, eles não dão pontos nas olimpíadas, mas podem dar algo mais valioso: um entendimento melhor do problema.

Na maioria dos problemas teremos uma parte extra chamada *Rascunho* para mostrar os "bastidores" das soluções, e também na ordem em que pensei no problema. Só depois vamos escrever uma solução mais limpa, melhor ordenada e concisa, o que é um bom hábito não só nesse tipo de problema (que, sendo sincero, é composto de praticamente todos os problemas de matemática), mas em geral. É importante saber o que é realmente necessário ou não para uma solução, tanto do ponto de vista de legibilidade (ou seja, evitar soluções curtas demais) como de ideias supérfluas (ou seja, economizar tempo para o corretor). Em geral, o rascunho termina no momento em que a solução do problema parece aparente, o que às vezes é quando o problema está essencialmente resolvido, e em outras vezes quando percebemos que temos todas as ideias necessárias para terminar o problema, mas essas ideias ainda não estão totalmente integradas entre si.

A principal consequência dessa estrutura é que cada problema vai ter um espaço maior do que o normal.

1 Conjecturando respostas

Casos pequenos/particulares em geral podem ser bastante úteis para encontrar a resposta para alguns problemas.

Exemplo 1. Há n carros, numerados de 1 a n, e uma fileira com n lugares para estacionar, numerados de 1 a n. Cada carro i tem seu lugar favorito a_i; quando vai estacionar, se dirige ao seu lugar favorito; se ele está livre estaciona ali, caso contrário, avança para o primeiro lugar livre e estaciona; se não encontra lugar livre, vai embora e não volta mais. Quantas sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ existem tais que todos os n carros conseguem estacionar?

Rascunho. Vamos listar alguns casos pequenos para entender o que está acontecendo:

Para $n = 1$, só há, é claro, uma possibilidade: (1).

Para $n = 2$, só não dá certo $(2, 2)$. As outras três $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(1, 1)$ dão certo.

Vejamos $n = 3$. As seis permutações $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$ obviamente dão certo. Além disso, note que algum carro deve ter 1 como vaga favorita, senão todos os carros passarão direto pela vaga 1 e algum deles não vai estacionar. As outras possibilidades são $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, que funcionam, e $(1, 3, 3)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 3, 1)$ que não funcionam, além das outras $2^3 = 8$ que não contêm 1. Note que já lista todas as $3^3 = 27$ possibilidades. Com isso, o total é 16.

Trabalhemos agora com $n = 4$. São $4^4 = 256$ possibilidades, então não vale a pena listar todos, ou seja, precisamos de alguma estratégia de contagem. Contemos por quantidade de uns. Já temos $3^4 = 81$ possibilidades que não funcionam (as que não tem 1). Além disso, é fácil ver que $(1, 1, 1, k)$ funciona. Com isso, temos $(1, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, k)$ com $k = 2, 3, 4$ e permutações, que são mais $1 + 4 \cdot 3 = 13$ possibilidades que funcionam. Os que têm exatamente dois uns só não funcionam se são $(1, 1, 4, 4)$ ou permutações. Mais $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$ que não funcionam e $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 6 = 48$ que funcionam. Entre os $4 \cdot 3^3 = 108$ que só têm um 1, retiramos o 1 (esse carro com certeza vai conseguir estacionar) e subtraímos 1 de cada outro número, e é possível estacionar se, e somente se, a sequência de três termos é válida. Com isso, temos $4 \cdot 16 = 64$ possibilidades que funcionam. O total é $13 + 48 + 64 = 125$.

Vejamos: se x_n é a quantidade pedida, temos $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 16 = 4^2$ e $x_4 = 125 = 5^3$. Parece que $x_n = (n+1)^{n-1}$, ou seja, a gente deve conseguir uma bijeção das sequências com $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^{n-1}$. Mas aí temos que conseguir uma associação entre sequências com n termos e sequências com $n-1$ termos, o que não parece ser interessante. Talvez seja mais fácil conseguir uma bijeção entre $(\text{sequência}, k)$, $1 \le k \le n+1$ e $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^n$.

Podemos fazer a solução agora.

Solução. A resposta é $(n+1)^{n-1}$. Mostraremos uma bijeção entre $(\text{sequência}, k)$, $1 \le k \le n+1$ e $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^n$.

Pensamos em $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^n$ primeiro. Considere então uma nova vaga $n+1$, e as regras continuam as mesmas. Uma ideia que facilita a divisão por $n+1$ é considerar permutações cíclicas, ou seja, vamos supor que as vagas estão em círculo. Desse modo, com as mesmas regras, todos os carros estacionam (por estarem em círculo, sempre aparece uma vaga livre!), e sobra uma vaga livre no final. Por simetria, há $\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1}$ configurações com i sendo a vaga livre, $1 \le i \le n+1$. Afirmamos que uma configuração corresponde a uma sequência válida se, e somente se, a vaga livre é $n+1$.

De fato, se a sequência é válida, os carros nunca chegam a precisar da vaga $n+1$, e ela nunca chega a ser usada. Reciprocamente, se a vaga livre é $n+1$, nenhum carro listou $n+1$ como vaga favorita no novo processo e, mais ainda, $n+1$ nunca foi usada como vaga livre, ou seja, nenhum carro passa da vaga n, o que significaria que ele iria embora. Logo o problema está terminado (de fato, a bijeção é feita entre sequências válidas e não válidas e $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}^n$, sendo que a sequência é válida se, e somente se, a vaga que sobra é $n+1$). $\square$

Exemplo 2. (Romênia 2003 TST) Em um torneio de matemática há $2n$ participantes. Cada um deles manda um problema para o júri, que depois dá para cada participante um dos $2n$ problemas. O torneio é dito *justo* quando existem n participantes que receberam os problemas dos outros n participantes.

Prove que a quantidade de distribuções de problemas em torneios justos é um quadrado perfeito.

Solução. Seja a_n a quantidade de distribuções de problemas em torneios justos com $2n$ participantes. Temos $a_1 = 1$ (as duas pessoas trocam de problemas entre si).

Calculemos a_2: a pessoa 1 tem 3 escolhas para quem vai receber seu problema; chame essa pessoa de 2. Ela ainda pode mandar problema para qualquer um dos outros (3 escolhas).

- Se ela mandar para 1, não há escolhas para os outros dois a não ser trocarem problemas;

- Se não, suponha que mandou para a pessoa 3. Então os dois conjuntos de participantes são 1 e 3 e, por exclusão, 2 e 4. Para quem a pessoa 3 manda o seu problema? A pessoa 2 já recebeu seu problema, e a pessoa 1 está no mesmo conjunto, então só pode ser a pessoa 4. A pessoa 4 só pode mandar seu problema para 1, já que os outros já têm seus problemas.

Ou seja, em qualquer caso, só há uma escolha. Com isso, $a_2 = 3 \cdot 3 = 9$.

Mais um caso pequeno: vejamos como calcular a_3. Tentemos a mesma ideia: a pessoa 1 tem 5 escolhas; chame de 2 a pessoa que recebeu o problema de 1. A pessoa 2 tem 5 escolhas de novo. Novamente dividimos em casos:

- Se 2 manda um problema de volta para 1, basta distribuir os quatro problemas entre as pessoas que sobraram. Há $a_2 = 9$ possibilidades para fazer isso. (Opa! Olha uma recursão aparecendo!)

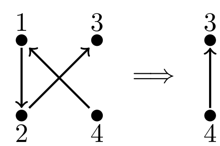
- Se 2 manda para outra pessoa, digamos 3, temos parte de um conjunto: $\{1, 3, x\}$. A pessoa 3 não pode mandar problemas para 1 ou 2, então manda para outra das 3 pessoas, digamos a pessoa 4. Com isso, temos o outro conjunto $\{2, 4, y\}$. Essa pessoa tem 3 escolhas: 1 ou as outras duas pessoas (note que 3 já recebeu o seu problema). Se for 1, sobram as outras duas e essas pessoas trocam problemas entre si. Se não for 1 e for, digamos 5, os conjuntos são $\{1, 3, 5\}$ e $\{2, 4, 6\}$ e 5 só pode mandar problema para 6, e 6 para 1. Novamente, temos $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades.

Logo $a_3 = 5^2 \cdot 9 = 225 = 15^2 = (1 \cdot 3 \cdot 5)^2$.

Parece que $a_n = (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1))^2 = ((2n-1)!!)^2$ (sim, a notação para o "imparial" $(2n-1)!!$ existe; além disso, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot n!$). Vamos provar isso.

Note então que, se estivermos certos, $a_n = (2n-1)^2 \cdot a_{n-1}$. Ou seja, fazemos o primeiro passo, escolhendo a pessoa 2 que recebe problema de 1 e em seguida a pessoa que recebe o problema de 2. No caso em que 2 manda problema para 1, a recursão fica clara. Mas e o segundo caso? Voltando ao caso $n = 3$ e pensando um pouco mais, o segundo caso pode ser simplificado:

- Se 2 manda para outra pessoa, digamos 3, faça o seguinte: já temos que 1 e 2 estão em conjuntos diferentes e que 1 e 3 estão no mesmo conjunto. Chame de 4 a pessoa que manda problema para 1. Essa pessoa 4 está no mesmo conjunto que 2. Agora, exclua 1 e 2 da lista de participantes e considere o torneio com duas pessoas (1 e 2) a menos e as pessoas mandam problemas para os mesmos participantes, exceto 4, que manda problema para 3. Em outras palavras, fazemos isso:



  Como sabemos que 3 e 4 estão em conjuntos diferentes, esse torneio também precisa ser justo. Com isso, há a_2 possibilidades nesse caso.

Esse argumento anterior pode ser usado no caso geral também (já que não mencionamos números maiores do que 4). Logo

$$a_n = (2n-1)^2 \cdot a_{n-1}$$

e podemos "telescopar" para terminar o problema: sendo $\frac{a_n}{a_{n-1}} = (2n-1)^2$,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = (2n-1)^2(2n-3)^2 \cdots 3^2 \implies a_n = (2n-1)^2(2n-3)^2 \cdots 3^2 a_1 = ((2n-1)!!)^2,$$

que é um quadrado perfeito. □

2 Procurando estrutura

No que segue, veremos que estudar casos pequenos não se resume só a achar conjecturas para respostas, mas também para entender melhor a estrutura do problema. Isso muitas vezes requer não só listar todos os casos exaustivamente, mas também fazer associações tanto entre entidades do problema como entre um caso e um ou mais casos anteriores.

Exemplo 3. (IMO 2008/5) Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k \geq n$ e $k - n$ é um número par. São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acesa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos sequências de operações.

Seja N o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ estão todas apagadas.

Seja M o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.

Determine a razão $\frac{N}{M}$.

Rascunho. Primeiro é preciso entender que a ordem das operações é importante, de modo que uma sequência de operações é uma k-upla ordenada de lâmpadas. Parece ser interessante ver casos pequenos em k deixando n fixado.

Se $k = n$, não há o que fazer a não ser escolher as n primeiras lâmpadas. Ou seja, nesse caso $N = M$.

Se $k = n + 2$, na contagem de M podemos escolher uma das n primeiras lâmpadas três vezes, dando um total de $M = n \cdot \frac{(n+2)!}{3!}$; na contagem de N, os casos não contados são aqueles em que qualquer uma das outras n lâmpadas é escolhida duas vezes, dando um total de $n \cdot \frac{(n+2)!}{2!} = 3M$; logo $N = 4M \iff \frac{N}{M} = 4$.

Se $k = n+4$, na contagem de M podemos escolher uma das n primeiras lâmpadas 5 vezes ou duas das n primeiras lâmpadas 3 vezes. Assim, $M = n \cdot \frac{(n+4)!}{5!} + \binom{n}{2} \cdot \frac{(n+4)!}{3!\,3!}$. Para contar N, temos alguns casos adicionais: uma das outras n lâmpadas é escolhida 2 vezes e uma das n primeiras 3 vezes, ou duas das outras n lâmpadas é escolhida 2 vezes, ou uma das outras n lâmpadas é escolhida 4 vezes. Assim, $N - M = n \cdot n \cdot \frac{(n+4)!}{2!\,3!} + \binom{n}{2} \cdot \frac{(n+4)!}{2!\,2!} + n \cdot \frac{(n+4)!}{4!}$. Interessantemente, temos graus diferentes nos termos acima. Tudo o que podemos fazer é torcer que eles se cortem correspondentemente (ou talvez ter algo que dependa de n). Os termos em $\binom{n}{2}(n+4)!$, lembrando que $n^2 = 2\binom{n}{2} + n$, são $\frac{1}{3!\,3!} = \frac{1}{36}$ em M e $\frac{2}{2!\,3!} + \frac{1}{2!\,2!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ em $N - M$; a razão é $\frac{5}{12} : \frac{1}{36} = 15$. Os termos em $n(n+4)!$ são $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ em M e $\frac{1}{2!\,3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$ em $N - M$; a razão é $\frac{1}{8} : \frac{1}{120} = 15$. Que sorte! Logo $N - M = 15M \iff \frac{N}{M} = 16 = 2^4$.

Para $k = n$ obtemos $\frac{N}{M} = 1 = 2^0$; para $k = n+2$, obtemos $\frac{N}{M} = 4 = 2^2$; para $k = n+4$, obtemos $\frac{N}{M} = 16 = 2^4$. Parece então que $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$. Podemos parar por aqui, mas as contas acima ainda não revelam muito sobre a estrutura do problema. Vamos investigar mais a fundo mais alguns casos pequenos.

O número $k - n$ são, de certo modo, as operações que "temos sobrando" após acender as n primeiras lâmpadas. Isso, e o fato de que as parcelas de N e M se "cortaram" de modo correspondente nos leva a crer que podemos encontrar uma correspondência 1 para 2^{k-n} entre as sequências que usam só as primeiras n lâmpadas e todas as sequências.

Como fazer a correspondência? Vamos investigar mais o caso $n = 1$ e $k - n = 4$, ou seja, $k = 5$: temos $M = 1$ pois só temos uma lâmpada disponível: $(1,1,1,1,1)$. Devemos ter $N = 16$. Temos, além de $(1,1,1,1,1)$, as sequências $(2,2,1,1,1)$, $(2,1,2,1,1)$, $(2,1,1,2,1)$, $(2,1,1,1,2)$, $(1,2,2,1,1)$, $(1,2,1,2,1)$, $(1,2,1,1,2)$, $(1,1,2,2,1)$, $(1,1,2,1,2)$, $(1,1,1,2,2)$, $(1,2,2,2,2)$, $(2,1,2,2,2)$, $(2,2,1,2,2)$, $(2,2,2,1,2)$ e $(2,2,2,2,1)$. Quais são as posições onde usamos a lâmpada 2? São, respectivamente, $\emptyset$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,5\}$ e $\{2,3,4,5\}$. Os subconjuntos de $\{1,2,3,4,5\}$ com cardinalidade par!

Mais um exemplo para entender um pouco melhor: $n = 2$ e $k - n = 2$, para podermos usar mais do que duas lâmpadas extras (vamos diminuir um pouco $k - n$ para não ficar com muitos casos). Temos $M = 8$: $(1,1,1,2)$, $(1,1,2,1)$, $(1,2,1,1)$, $(2,1,1,1)$ e os simétricos trocando 1 por 2. Temos também $N = 32$. Além das sequências dadas, temos as com a lâmpada 3 com dois toques e 4 com dois toques: $(1,2,3,3)$, $(1,3,2,3)$, $(1,3,3,2)$, $(2,1,3,3)$, $(2,3,1,3)$, $(2,3,3,1)$, $(3,1,2,3)$, $(3,1,3,2)$, $(3,2,1,3)$, $(3,2,3,1)$, $(3,3,1,2)$, $(3,3,2,1)$ e os análogos com 4 no lugar de 3. Se mantivermos os 1's e 2's, podemos associar $(1,2,3,3)$ a $(1,2,1,1)$, $(1,3,2,3)$ a $(1,1,2,1)$, e assim por diante, trocando 3's por 1's. Note que associamos $(3,2,1,3)$ e $(3,2,3,1)$ também a $(1,2,1,1)$, e temos um total de quatro associações: usamos as posições $\emptyset$ (para $(1,2,1,1)$), $\{1,3\}$ (para $(3,2,3,1)$), $\{1,4\}$ (para $(2,3,1,3)$) e $\{3,4\}$ (para $(1,2,3,3)$), que são os subconjuntos de $\{1,3,4\}$ com cardinalidade par. E os exemplos com 4? Juntamos os exemplos com três ocorrências de 2.

Com isso, talvez estejamos prontos para o caso geral (caso não esteja, pense no caso $n = 2$ e $n - k = 4$!), e podemos ir para a solução (que com certeza será bem mais curta que esse rascunho).

Solução. A resposta é $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$ e provaremos esse fato usando uma associação 1 para 2^{k-n} entre as M sequências que só usam as primeiras n lâmpadas e as N sequências que usam todas as lâmpadas. Para tanto, faça pares de lâmpadas $(i, i+n)$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Considere uma sequência $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ que só usa as n primeiras lâmpadas e suponha que a lâmpada i, $1 \le i \le n$, seja usada $2m_i + 1$ vezes. Note que $(2m_1 + 1) + (2m_2 + 1) + \cdots + (2m_n + 1) = k$. Considere subconjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, todos de cardinalidade par, das posições das operações nas lâmpadas $1, 2, \dots, n$, respectivamente. Esses subconjuntos de operações em i serão substituídas por operações em $i + n$. Por exemplo, para $n = 3$ e $k = 7$, associamos $(1,1,2,3,1,3,3)$ e $(\{1,5\}, \emptyset, \{6,7\})$ a $(4,1,2,3,4,6,6)$.

Essa operação é facilmente invertível, pois basta trocar de volta $n + i$ por i e observar as posições de troca para recuperar $A_1, \dots, A_n$. Como devemos manter os estados das lâmpadas, todos os conjuntos A_i têm cardinalidade par.

Assim, temos a nossa associação, e cada sequência que só usa as n primeiras lâmpadas está associada a $2^{2m_1} \cdot 2^{2m_2} \cdot \ldots \cdot 2^{2m_n} = 2^{2m_1+2m_2+\cdots+2m_n} = 2^{n-k}$. □

3 Casos pequenos em álgebra

Existem problemas de álgebra em que estudar casos pequenos é interessante. Há alguns exemplos relativamente óbvios:

- Desigualdades com n variáveis: que tal tentar $n = 1, 2, 3$?
- Sequências: quais são os primeiros termos da sequência? Ou, se ela é de duas componentes, faça uma tabela ou triângulo (como o de Pascal) com valores iniciais.
- Polinômios: tente graus pequenos ou fatorações particulares.

Exemplo 4. (Banco IMO 96/A6) Seja $n \geq 3$ inteiro. Os reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são tais que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Prove que

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i<j} x_i x_j > \left(\sum_{i=1}^{n}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1)x_j\right).$$

Rascunho. Vamos tentar $n = 3$: a desigualdade é

$$3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) > (2x_1 + x_2)(x_2 + 2x_3),$$

que é equivalente a

$$(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) > 0,$$

que é verdade.

O caso $n = 4$ nos dá uma ideia melhor também do que deve acontecer:

$$6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) > (3x_1 + 2x_2 + x_3)(x_2 + 2x_3 + 3x_4)$$

que, depois de um pouco de trabalho, se reduz a

$$3(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) > 2(x_3 - x_2)^2,$$

que também é verdade, pois $x_3 - x_1 > x_3 - x_2$ e $x_4 - x_2 > x_3 - x_2$.

O que esses dois exemplos nos dizem? Parece que o que importam são as diferenças. Mas a ideia que ajuda mais é que *parece que podemos supor que* $x_1 = 0$. Isso nos sugere que uma indução deve dar certo. Seja

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i<j} x_i x_j - \left(\sum_{i=1}^{n}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1)x_j\right).$$

Para $n = 3$, a nossa conta mostra que $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3-x_2)(x_2-x_1)$, e para $n = 4$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) - 2(x_3 - x_2)^2$. Em ambos os casos, $f(x_1 + k, x_2 + k, \ldots, x_n + k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (o k cancelaria em cada diferença), o que nos permite supor que $x_1 = 0$ (escolhemos $k = -x_1$).

Por outro lado, $x_1 = 0$ nos leva a querer usar indução. Vamos ver mais um caso? Para $n = 5$, podemos supor que $x_1 = 0$. Mudando de $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ para $(0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, temos que provar que

$$10(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) > (3x_1 + 2x_2 + x_3)(2x_2 + 3x_3 + 4x_4).$$

O fator $3x_1 + 2x_2 + x_3$ não muda com relação à desigualdade para $n = 4$! Ajustando o coeficiente de 10 para 6, temos que provar que

$$6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) > \frac{3}{5}(3x_1 + 2x_2 + x_3)(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4).$$

Assim, como da hipótese de indução,

$$6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) > (3x_1 + 2x_2 + x_3)(x_2 + 2x_3 + 3x_4),$$

basta que

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 > \frac{3}{5}(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) \iff x_3 + 3x_4 > 3x_1 + x_2,$$

que é verdade pois $x_3, x_4 > x_1, x_2$.

Agora temos todos os elementos para ter uma solução.

Solução. Seja

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} x_i x_j - \left(\sum_{i=1}^{n} (n-i) x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (j-1) x_j \right).$$

Primeiro, vamos mostrar que

$$f(x_1 + k, x_2 + k, \ldots, x_n + k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& f(x_1 + k, x_2 + k, \ldots, x_n + k) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} (x_i + k)(x_j + k) - \left(\sum_{i=1}^{n} (n-i)(x_i + k) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (j-1)(x_j + k) \right) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} (x_i x_j + k(x_i + x_j) + k^2) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (n-i)(j-1)(x_i x_j + k(x_i + x_j) + k^2)
\end{aligned}$$

Coletando os termos em k, obtemos

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} (x_i + x_j) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (n-i)(j-1)(x_i + x_j).$$

No primeiro somatório, o x_m aparece como $i = m$ nos valores maiores do que m e como $j = m$ nos valores menores do que m, ou seja, aparece exatamente $n - 1$ vezes. Ou seja,

$$\sum_{i<j} (x_i + x_j) = (n-1) \sum_{m=1}^{n} x_m.$$

No segundo somatório, o x_m para como $i = m$ na soma $(n-m)\sum_{j=1}^{n}(j-1) = (n-m)n(n-1)/2$ vezes e como $j = m$ na soma $\sum_{i=1}^{n}(n-i)(m-1) = (m-1)n(n-1)/2$ vezes. Somando, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (n-i)(j-1)(x_i + x_j) = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{(n-m)n(n-1)}{2} + \frac{(m-1)n(n-1)}{2} \right) = \frac{n(n-1)^2}{2}.$$

Com isso, o termo em k é zero.

Agora, coletamos os termos em k^2, obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} 1 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (n-i)(j-1) &= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} (n-i) \sum_{j=1}^{n} (j-1) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Com isso, chegamos a

$$f(x_1+k, x_2+k, \ldots, x_n+k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Para resolver o problema, fazemos indução em n. Para $n=3$, sendo $k=-x_1$ e usando $y_1 = x_2 - x_1 > 0$ e $y_2 = x_3 - x_1 > y_1$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(0, x_2 - x_1, x_3 - x_1) = f(0, y_1, y_2) = 3y_1y_2 - y_1(y_1 + 2y_2) = y_1(y_2 - y_1) > 0.$$

Para $n > 3$, suponha que o resultado é válido para valores menores de n. Novamente sendo $k = -x_1$ e $y_i = x_{i+1} - x_1$, temos $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1}$ e

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} y_i y_j - \sum_{i=1}^{n} (n-i) y_{i-1} \sum_{j=1}^{n} (j-1) y_{j-1}.$$

Reajustando os termos, temos que provar que

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} y_i y_j > \sum_{i=1}^{n-1} (n-1-i) y_i \sum_{j=1}^{n-1} j y_j.$$

Mas, da hipótese de indução

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \sum_{i<j} y_i y_j > \sum_{i=1}^{n-1} (n-1-i) y_i \sum_{j=1}^{n-1} (j-1) y_j,$$

que equivale a

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} y_i y_j > \frac{n}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-1-i) y_i \sum_{j=1}^{n-1} (j-1) y_j.$$

Assim, basta que

$$n \sum_{j=1}^{n-1} (j-1) y_j > (n-2) \sum_{j=1}^{n-1} j y_j \iff \sum_{j=1}^{n-1} (2j-n) x_j > 0.$$

Isso é verdade pois o termo $2j - n$ é positivo para índices maiores do que $n/2$ e é negativo para índices menores do que $n/2$. Como a soma dos coeficientes é $\sum_{j=1}^{n-1} (2j-n) = 2(n-1)n/2 - (n-1)n = 0$, e $y_k > y_\ell$ para $k > \ell$, as variáveis de índices maiores majoram as de índice menor, e o resultado segue. $\square$

Exemplo 5. (Banco IMO 2000/A4) A função F é definida no conjunto dos inteiros não negativos e toma valores inteiros não negativos e satisfaz às seguintes condições:

(i) $F(4n) = F(2n) + F(n)$;

(ii) $F(4n+2) = F(4n) + 1$;

(iii) $F(2n+1) = F(2n) + 1$.

Prove que, para cada inteiro positivo n, a quantidade de inteiros n com $0 \le n < 2^m$ e $F(4n) = F(3n)$ é $F(2^{m+1})$.

Rascunho. Primeiro, note que a função F é unicamente determinada, pois (i) determina os múltiplos de 4, (ii) determina os pares não múltiplos de 4 e (iii) determina os ímpares. Vejamos os valores pequenos:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$F(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	5	6	6	7	5	6
$F(3n)$	0	2	3	4	5	7	6	8	8	10	11	9	10	12	12	14	13	15
$F(4n)$	0	2	3	5	5	7	8	10	8	10	11	13	13	15	16	18	13	15

Primeiro vamos entender o que é $F(n)$. A relação $F(4n) = F(2n) + F(n)$ nos dá a dica de que devemos usar a sequência de Fibonacci para as potências de 2. As potências de 2 nos leva à base binária. De fato, as relações na base 2 são

$$F(n00) = F(n0) + F(n); \quad F(n10) = F(n00) + 1; \quad F(n1) = F(n0) + 1.$$

Observando que $F_1 = F_2 = 1$, podemos reescrever na base binária:

$$F(n00) = F(n0) + F(n); \quad F(n10) = F(n00) + F_2; \quad F(n1) = F(n0) + F_1,$$

o que nos leva à conclusão de que

$$F((a_k a_{k-1} \dots a_0)_2) = a_k F_{k+1} + a_{k-1} F_k + \cdots + a_0 F_1.$$

Ou seja, trocamos cada dígito 1 pelo Fibonacci correspondente. Isso é quase direto das relações dadas.

Agora, vamos à equação $F(3n) = F(4n)$. Olhando a nossa tabela, parece que $F(3n) \le F(4n)$, e a igualdade acontece para os seguintes números:

n	0	1	2	4	5	8	9	10	16	17
$(n)_2$	0	1	10	100	101	1000	1001	1010	10000	10001

E os que *não* dão certo?

n	3	6	7	11	12	13	14	15
$(n)_2$	11	110	111	1011	1100	1101	1110	1110

O que aconteceu? Parece que os valores de n que satisfazem $F(4n) = F(3n)$ são exatamente aqueles que *não têm dois uns seguidos na base* 2.

Talvez fique mais fácil de entender quando lembrarmos que $F(4n) = F(2n) + F(n)$. Assim, queremos saber quando $F(3n) = F(2n) + F(n)$. Na base 2, $2n$ é n com um zero adicionado à direita. Se não há dígitos 1 seguidos em n, os 1 de $2n$ e n estão em posições diferentes; em outras palavras, ao calcular $3n = 2n + n$ não acontece "vai um". Reciprocamente, se n tem dois 1 seguidos, eles vão ser somados ao fazer $2n + n$, e acontece o "vai um".

Assim, fica claro (fica?) por que $F(4n) = F(3n)$ se, e somente se, n não tem dois uns seguidos na base 2: na hora de comparar $F(a + b)$ com $F(a) + F(b)$, um "vai um" na posição k troca $F_{k+1} + F_{k+1}$ por $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \le F_{k+1} + F_{k+1}$, em que a igualdade ocorre somente quando $k = 1$. Então $F(a + b) \le F(a) + F(b)$, com igualdade se, e somente se, acontece no máximo um "vai um", na segunda casa da direita. Em $2n + n$ não há como esse único "vai um" acontecer, pois as duas casas seguidas iguais a 1 de n forçam dois "vai um", um em cada casa.

Só falta contar a quantidade a_m de números n com no máximo m algarismos sem uns seguidos. Para isso, basta considerar a casa das unidades: se for 0, podemos tomar à sua esquerda qualquer número de no máximo $m - 1$ algarismos sem uns seguidos, ou seja, há a_{m-1} números nesse caso; se for 1, o dígito à esquerda deve ser 0 e podemos tomar à esquerda de 01 qualquer número de no máximo $m - 2$ algarismos sem uns seguidos, que são a_{m-2} no total. Sendo $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$ (todos menos 11), $a_m = F_{m+2} = F(2^{m+1})$, e o problema terminou.

A solução mais limpinha fica a cargo do leitor.

4 Casos pequenos em teoria dos números

Em teoria dos números, há várias situações que exigem ou em que é vantajoso estudar casos pequenos. Seguem alguns exemplos:

- Considerar somente os primos para começar, ou seja, estudar ν_p.
- Determinar fatores primos em problemas de ordem/LTE.

- Novamente, em sequências, considerar termos iniciais.
- Problemas envolvendo conjuntos e divisibilidade: tente conjuntos pequenos.

Exemplo 6. (IMO 2000/5) Determine se existe um inteiro positivo n com exatamente 2000 fatores primos distintos tal que $2^n + 1$ é divisível por n.

Rascunho. 2000 é um pouco demais, né? Que tal tentar... 1? A gente consegue uma potência de primo? Ou mais simples ainda, um primo? Pelo teorema de Fermat, se n é primo então $2^n+1 \equiv 2+1 \pmod{n}$, de modo que $n = 3$.

Agora, dá para tomar qualquer potência de 3? Sim! Veja que $\nu_3(2^n+1) = \nu_3(3) + \nu_3(n) > \nu_3(n)$, então $n = 3^\alpha$ dá certo.

Como conseguir outros fatores primos? Uma ideia é considerar que se m e n são ímpares então $m \mid n \implies 2^m + 1 \mid 2^n + 1$. Aplicando essa propriedade à solução temos

$$n \mid 2^n + 1 \implies 2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1.$$

Então parece natural olhar para $2^{3^\alpha} + 1$. Para $\alpha = 1$ obtemos $2^3 + 1 = 9$, e não há fatores novos. Agora, para $\alpha = 2$ temos $2^{3^2} + 1 = 3^3 \cdot 19$, e podemos tentar $n = 3^2 \cdot 19$. Não é necessário testar mais ν_3, e $\nu_{19}(2^n+1) = \nu_{19}(2^{3^2}+1) + \nu_{19}(19) = 2 > 1$. Aliás, $n = 3^2 \cdot 19^\beta$ parece funcionar, pois $\nu_{19}(2^n+1) = \nu_{19}(2^{3^2}+1) + \nu(19^\beta) > \beta$.

A ideia parece transparecer agora: adicionamos um fator primo p a n, e procuramos esse fator primo em 2^n+1. Primeiro, temos que provar que existe um primo p em 2^n+1 que não aparece em n, para a gente poder aumentar a quantidade de fatores primos. O problema é que nem sempre isso acontece, como vimos para $n = 3$. Uma maneira de conseguir novos fatores é calcular mdc: se ele é baixo, com certeza temos fatores novos. De fato, sendo $d = \text{mdc}\left(2^n+1, \frac{2^{np}+1}{2^n+1}\right)$,

$$2^n \equiv -1 \pmod{d} \implies \frac{2^{np}+1}{2^n+1} = 2^{n(p-1)} - 2^{n(p-2)} + \cdots + 1 \equiv p \pmod{d},$$

ou seja, $d \mid p \implies d \le p$. Como $\frac{2^{np}+1}{2^n+1} = 2^{n(p-2)} + 2^{n(p-4)} + \cdots + 2^1 + 1 > 2\frac{p-1}{2} + 1 = p$, existe um fator primo diferente de p que está em $2^{pn}+1$ que não está em 2^n+1.

Assim, dado n tal que n divide 2^n+1, tomamos um fator p de $\frac{2^n+1}{n}$ que não está em n e tomamos $m = np^t$. Então, como $n \mid 2^n+1$ e $n \mid m$, então $n \mid 2^m+1$. Agora só falta $p^t \mid 2^m+1$, pois $\text{mdc}(p,n) = 1$. Mas isso não é um grande problema pois

$$\nu_p(2^m+1) = \nu_p(2^n+1) + \nu_p(p^t) > t = \nu_p(m).$$

Novamente, fica para você escrever a solução.

Exemplo 7. (Banco IMO 1994/N4) Sendo x_0 um inteiro positivo, defina as sequências $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ da seguinte forma:

- $y_0 = 4$ e $z_0 = 1$.
- Se x_n é par, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$, $y_{n+1} = 2y_n$ e $z_{n+1} = z_n$;
- Se x_n é ímpar, $x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{2} - z_n$, $y_{n+1} = y_n$ e $z_{n+1} = y_n + z_n$.

O inteiro x_0 é *bacana* quando $x_n = 0$ para algum $n \ge 1$. Encontre a quantidade de inteiros bacanas menores ou iguais a 1994.

Rascunho. Há várias maneiras de se pensar no problema. Uma é ver quando $x_1 = 0$. Note que nesse caso, isso só pode ser quando x_0 é ímpar, com $x_1 = x_0 - \frac{y_0}{2} - z_0 \iff x_0 = 3$.

Dá para ver alguns padrões rapidamente também: por exemplo, y_n é uma potência de 2 com expoente pelo menos 2 (de fato, ou deixamos y_n igual ou multiplicamos por 2), e $z_n \equiv 1 \pmod{4}$, pois quando mudamos z_n somamos y_n, que é múltiplo de 4. Assim, se x_n é ímpar, x_{n+1} é par, ou seja, não há ímpares consecutivos na sequência $\{x_n\}$. Além disso, x_n só pode ser zero quando x_{n-1} é ímpar.

Finalmente, é natural procurar um invariante: para x_n par, dividimos x_n por 2 e multiplicamos y_n por 2. Então parece interessante considerar $x_{n+1}y_{n+1}$. No caso par, $x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n$. No caso ímpar,

$$x_{n+1}y_{n+1} = \left(x_n - \frac{y_n}{2} - z_n\right) y_n = x_n y_n - \frac{y_n^2 + 2y_n z_n}{2}.$$

Aparece um pedacinho de $\frac{(y_n+z_n)^2}{2} = \frac{z_{n+1}^2}{2}$. Vamos tentar $x_n y_n + \frac{z_n^2}{2}$? Veja que $z_{n+1} = z_n$ no caso par, e no caso ímpar,

$$x_{n+1}y_{n+1} + \frac{z_{n+1}^2}{2} = x_n y_n - \frac{y_n^2 + 2y_n z_n}{2} + \frac{(y_n + z_n)^2}{2} = x_n y_n + \frac{z_n^2}{2}.$$

Funciona!

Isso já um bom começo: se $x_n = 0$, lembrando que $z_n = 4k + 1$, $y_0 = 4$ e $z_0 = 1$,

$$x_0 y_0 + \frac{z_0^2}{2} = \frac{z_n^2}{2} \iff x_0 = \frac{z_n^2 - 1}{8} = k(2k+1),$$

ou seja, x_0 deve ser da forma $k(2k+1)$. Na nossa primeira solução $x_0 = 3$, $k = 1$.

Vamos ver quando $x_2 = 0$: então $x_1 = \frac{y_1}{2} + z_1$, que é ímpar. Logo x_0 é par e igual a $2x_1$, $y_0 = \frac{y_1}{2}$, de modo que $y_1 = 8$, e $z_1 = z_0 = 1$; nesse caso, $x_0 = 2x_1 = 2(4+1) = 10$ ($k = 2$).

Agora, há dois caminhos para se seguir para resolver o problema: (1) ver quando $x_n = 0$ para cada n; (2) ver para quais valores de k começar com $x_0 = k(2k+1)$ dá certo. Os dois caminhos são efetivos, e em ambos os casos ver alguns casos pequenos ajuda. E é claro que podemos misturar os dois caminhos!

Caminho 1: Quando $x_3 = 0$? $x_2 = \frac{y_2}{2} + z_2$ é ímpar; $x_1 = 2x_2$, $z_1 = z_2$ e $y_1 = \frac{y_2}{2}$. Agora há duas possibilidades: se x_0 é par, $x_0 = 4x_2$, $y_1 = 2y_0 = 8$, $z_1 = z_0 = 1$; daí, $y_2 = 16$, $z_2 = 1$ e $x_2 = 8 + 1 = 9$, de modo que $x_0 = 36$ ($k = 4$); se x_0 é ímpar, $x_1 = x_0 - \frac{y_0}{2} - z_0 = x_0 - 3$, $y_1 = y_0 = 4$ e $z_1 = y_0 + z_0 = 5$, $y_2 = 8$, $z_2 = 5$, e $x_2 = 4 + 5 = 9$ novamente, $x_1 = 18$ e $x_0 = 21$ ($k = 3$). Nesse caso há duas soluções!

Talvez seja mais interessante ver os valores de (y_{n-1}, z_{n-1}) para os quais $x_n = 0$. Para $n = 1$, temos $(4, 1)$; para $n = 2$, temos $(8, 1)$; para $n = 3$, temos $(16, 1)$ e $(8, 5)$. Lembremos que y_k é sempre potência de 2 e $z_k \equiv 1 \pmod 4$. Parece que $y_k > z_k$ nesses casos, e essa é a única restrição.

Primeiro, é claro que y_{n-1} é potência de 2; além disso, se x_{k-1} é par então $y_k > z_k$ e se x_{k-1} é ímpar então $2y_k > z_k > y_k$, o que sai por indução: se x_k é par, $y_{k+1} = 2y_k > z_k = z_{k+1}$; se x_k é ímpar, x_{k-1} é par, e $2y_{k+1} = 2y_k > y_k + z_k = z_{k+1} > y_k = y_{k+1}$.

Isso determina toda a sequência ao contrário a partir de $x_n = 0$. De fato, x_{n-1} é ímpar e x_{n-2} é par, de modo que $y_{n-1} > z_{n-1}$ e $x_{n-1} = \frac{y_{k-1}}{2} + z_{k-1}$. Se $y_k > z_k$, x_{k-1} é par, $x_{k-1} = 2x_k$, $y_{k-1} = \frac{y_k}{2}$ e $z_{k-1} = z_k$; se $y_k < z_k$, x_{k-1} é ímpar, $y_{k-1} = y_k$, $z_{k-1} = z_k - y_k$ e $x_{k-1} = x_k - \frac{y_k}{2} + z_k$. Como x_k não é par duas vezes seguidas, y_k é dividido por 2 a cada duas descidas de índice, e em algum momento é igual a $y_m = 4$; nessa situação, se $z_m > 4$ então $z_m < 8$, ou seja, $z_m = 5$, x_{m-1} é ímpar e $z_{m-1} = z_m - y_m = 1$; caso contrário, $z_m < y_m$, o que só quer dizer que $z_m = 1$ (novamente, lembre que $z_m \equiv 1 \pmod 4$).

Aí a questão é entender os limites, observando que se $x_0 = f(y_{n-1}, z_{n-1})$, f é crescente tanto em y_{n-1} como em z_{n-1}. Sendo $f(64, 61) = 1953 < 1994 < 2080 = f(128, 1)$, basta contar os valores $(2^t, 4u+1)$ com $2 \le t \le 6$ e $1 \le 4u + 1 < 2^t \iff 0 \le u < 2^{t-2}$. A resposta é então $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.

Caminho 2: Já vimos o caminho para $k = 1, 2, 3, 4$ acima. Para $k = 5$, temos (x_k, y_k, z_k) sendo $(55, 4, 1)$, $(52, 4, 5)$, $(26, 8, 5)$, $(13, 16, 5)$, $(0, 16, 21)$; para $k = 6$, temos $(78, 4, 1)$, $(39, 8, 1)$, $(34, 8, 9)$, $(17, 16, 9)$, $(0, 16, 25)$.

Como temos os passos de dividir por 2, podemos pensar em $x_t = 2^{a_t} b_t$, com b_t ímpar. Nesse caso, talvez seja mais fácil estudar $x_0 = 2^t(2^{t+1} + 1)$. Nesse caso, temos $(2^t(2^{t+1}+1), 4, 1)$, e transferimos fatores 2 de x_i para y_i até obter $(2^{t+1} + 1, 2^{t+2}, 1)$. Logo em seguida, obtemos $x_n = 0$.

O que acontece se $x_0 = k(2k+1)$ com $k = 2^t + 2^u$, $t < u$? Nesse caso, $x_0 = 2^t(2^{u-t}+1)(2^{t+1}+2^{u+1}+1)$ e após tirar as potências de 2, obtemos $((2^{u-t}+1)(2^{t+1}+2^{u+1}+1), 2^{t+2}, 1) = (2^{u+2} + 2^{2u-t+1} + 2^{u-t} + 2^{t+1} + 1, 2^{t+2}, 1)$. Em seguida, obtemos $(2^{u+2} + 2^{2u-t+1} + 2^{u-t}, 2^{t+2}, 2^{t+2} + 1)$. Tiramos mais $u - t$ fatores 2 de x_i, obtendo $(2^{t+2} + 2^{u+1} + 1, 2^{u+2}, 2^{t+2} + 1)$, e logo depois $x_n = 0$. Interessante! Note que usamos $u + 2$ passos! No caso de uma potência de 2 só usamos $t + 1$ passos.

Mais um caso: $k = 2^t + 2^u + 2^v$, $t < u < v$. Será que são $v + 3$ passos? Os t primeiros passos levam a $((1 + 2^{u-t} + 2^{v-t})(2^{t+1} + 2^{u+1} + 2^{v+1} + 1), 2^{t+2}, 1)$. Em seguida subtraímos $2^{t+1} + 1$ de x_i, obtendo

$2^{u+1}+2^{v+1}+(2^{u-t}+2^{v-t})(2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1)$. Fazemos mais $u-t$ passos (por quê?) e obtemos $(2^{t+1}+2^{v+t-u+1}+(1+2^{v-u})(2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1), 2^{u+2}, 2^{t+2}+1)$. Subtraímos $2^{u+1}+2^{t+2}+1$ de x_i, e obtemos $2^{v+t-u+1}+2^{v+1}+2^{v-u}(2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1)$, e $z_i = 2^{u+2}+2^{t+2}+1$. Mais $v-u$ passos e obtemos $x_i = 2^{t+1}+2^{u+1}+2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1 = 2^{t+2}+2^{u+2}+2^{v+1}+1$. Daí, mais um passo zera o x_i. Organizando um pouco melhor, temos

x	y	z
$(2^t+2^u+2^v)(2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1)$	4	1
$(1+2^{u-t}+2^{v-t})(2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1)$	2^{t+2}	1
$2^{u+1}+2^{v+1}+(2^{u-t}+2^{v-t})(2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1)$	2^{t+2}	$2^{t+2}+1$
$2^{t+1}+2^{v-u+t+1}+(1+2^{v-u})(2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1)$	2^{u+2}	$2^{t+2}+1$
$2^{v-u+t+1}+2^{v+1}+2^{v-u}(2^{t+1}+2^{u+1}+2^{v+1}+1)$	2^{u+2}	$2^{t+2}+2^{u+2}+1$
$2^{t+2}+2^{u+2}+2^{v+1}+1$	2^{v+2}	$2^{t+2}+2^{u+2}+1$
0	2^{v+2}	$2^{t+2}+2^{u+2}+2^{v+2}+1$

As contas são chatas, né? Vamos comparar com $k = 2^t+2^u$:

x	y	z
$(2^t+2^u)(2^{t+1}+2^{u+1}+1)$	4	1
$(1+2^{u-t})(2^{t+1}+2^{u+1}+1)$	2^{t+2}	1
$2^{u-t}(2^{t+1}+2^{u+1}+1)+2^{u+1}$	2^{t+2}	$2^{t+2}+1$
$2^{t+2}+2^{u+1}+1$	2^{u+2}	$2^{t+2}+1$
0	2^{u+2}	$2^{t+2}+2^{u+2}+1$

Você viu que as operações em y e z são as mesmas? Por que isso acontece? A ideia é a seguinte: x_n não é somado ou subtraído em y_n e z_n, ou seja, de certo modo os mesmos valores são obtidos. Além disso, se $k = 2^a+\ell$, com $a \ge \nu_2(\ell)$, $k(2k+1) = (2^a+\ell)(2^{a+1}+2\ell+1) = 2^a(2^{a+1}+2\ell+1+2\ell)+\ell(2\ell+1)$, a quantidade de divisões por 2 vai ser a mesma, e os mesmos números serão subtraídos de x_n.

Solução (Só do segundo caminho). Temos que $x_ny_n + z_n^2/2$ é um invariante. De fato, se x_n é par, $x_{n+1}y_{n+1}+z_{n+1}^2/2 = x_n/2\cdot 2y_n + z_n^2/2$ e se x_n é ímpar, $x_{n+1}y_{n+1}+z_{n+1}^2/2 = (x_n - y_n/2 - z_n)y_n + (y_n+z_n)^2/2 = x_ny_n + z_n^2/2$. Assim, se $x_n = 0$ para algum n, $x_ny_n + z_n^2/2 = x_0y_0 + z_0^2/2 \implies x_0 = (z_n^2-1)/8$.

Além disso, como em cada operação mantemos y_n ou dobramos e $y_0 = 4$, y_n é uma potência de 2 maior do que 2 e como mantemos z_n ou somamos y_n, um múltiplo de 4, e $z_0 = 1$, $z_n \equiv 1 \pmod 4$ para todo n. Com isso, todo x_0 bacana é da forma $((4k+1)^2-1)/8 = k(2k+1)$.

Vamos provar que $x_0 = k(2k+1)$ é bacana para todo $k \ge 1$. Defina a_k como o expoente inteiro tal que $2^{a_k} \le k < 2^{a_k+1}$. Provaremos por indução que $k(2k+1)$ é bacana *e* que dividimos x_n por 2 exatamente a_k vezes. Isso é verdadeiro para $k=1$, pois $(3,4,1)$ é levado imediatamente para $(0,4,5)$. Para $k \ge 2$, escreva $k = 2^a+\ell$ com $2^a < k < 2^{a+1}$ e $a = a_k$ para simplificar; note que $\ell < 2^a \implies \nu_2(\ell) < a$. Temos

$$k(2k+1) = (2^a+\ell)(2^{a+1}+2\ell+1) = 2^a(2^{a+1}+4\ell+1)+\ell(2\ell+1).$$

As operações sobre y_n e z_n dependem exclusivamente da paridade de x_n; como $2^a(2^{a+1}+4\ell+1)$ tem a fatores 2, e $\ell(2\ell+1)$ tem menos fatores 2, as operações iniciais são as mesmas que para $\ell(2\ell+1)$, e em algum momento, após dividir por 2 a_ℓ vezes (e possivelmente outras operações) obtemos

$$x_t = 2^{a-a_\ell}(2^{a+1}+4\ell+1), \quad y_t = 2^{a_\ell+2}, \quad z_t = 4\ell+1.$$

Dividimos por 2 mais $a - a_\ell$ vezes, num total de $a = a_k$ divisões por 2 (uma parte da indução feita!), e obtemos

$$x_m = 2^{a+1}+4\ell+1, \quad y_m = 2^{a+2}, \quad z_m = 4\ell+1,$$

e no próximo passo, obtemos

$$x_n = 0, \quad y_n = 2^{a_k+2}, \quad z_n = 2^{a+2}+4\ell+1 = 4k+1.$$

Isso acaba com a indução e com o problema: os números bacanas são precisamente os da forma $k(2k+1)$, e basta resolver $k(2k+1) \le 1994 \iff k \le 31$, e a resposta é 31. $\square$

Exemplo 8. (IMO 2016/4, generalizado) Um conjunto de números inteiros positivos é chamado *fragante* se contém pelo menos dois elementos e cada um de seus elementos tem algum fator primo em comum com pelo menos um dos elementos restantes. Seja $P(n) = n^2 + n + 1$. Determine *todos* os inteiros positivos b para o quais exista algum número inteiro não negativo a tal que o conjunto

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

seja fragante.

Rascunho. Esse problema é naturalmente para casos pequenos! Mas antes vamos ver algumas propriedades de $P(n)$:

- $P(n-1) = n^2 - n + 1$, $P(n^2) = P(n)P(n-1)$.
- $\operatorname{mdc}(P(n), P(n-1)) = \operatorname{mdc}(n^2+n+1, n^2-n+1) = \operatorname{mdc}(2n, n^2+n+1) = 1$.
- $\operatorname{mdc}(P(n+2), P(n)) = \operatorname{mdc}(n^2+5n+7, n^2+n+1) = \operatorname{mdc}(n^2+n+1, 4n+6) = \operatorname{mdc}(n^2+n+1, 2n+3) = \operatorname{mdc}(2n+3, n-2) = \operatorname{mdc}(n-2, 7) \in \{1, 7\}$, e é igual a 7 se, e somente se, $n \equiv 2 \pmod 7$.
- $\operatorname{mdc}(P(n+3), P(n)) = \operatorname{mdc}(n^2+7n+13, n^2+n+1) = \operatorname{mdc}(n^2+n+1, 6n+12) = \operatorname{mdc}(n^2+n+1, 3n+6) \mid 3\operatorname{mdc}(n^2+n+1, n+2) = 3\operatorname{mdc}(n+2, 3)$. Se $n = 3k+1$, $n^2+n+1 = 9k^2+9k+3$ não é múltiplo de 9, logo $\operatorname{mdc}(P(n+3), P(n)) \in \{1, 3\}$, sendo igual a 3 quando $n \equiv 1 \pmod 3$.
- $\operatorname{mdc}(P(n+4), P(n)) = \operatorname{mdc}(n^2+9n+21, n^2+n+1) = \operatorname{mdc}(n^2+n+1, 8n+20) = \operatorname{mdc}(n^2+n+1, 2n+5) = \operatorname{mdc}(2n+5, n-7) = \operatorname{mdc}(2n+5, 19) \in \{1, 19\}$, sendo 19 para $n \equiv 7 \pmod{19}$.

Agora, podemos atacar o problema: a resposta é todo inteiro maior ou igual a 6. Para 5 elementos $P(a+1), P(a+2), P(a+3), P(a+4), P(a+5)$, considere o termo central $P(a+3)$. Já sabemos que $P(a+2)$ e $P(a+4)$ são primos com $P(a+3)$, então $P(a+3)$ precisa ter fatores comuns com $P(a+1)$ ou $P(a+5)$. Os dois são análogos, então podemos supor que $\operatorname{mdc}(P(a+1), P(a+3)) = 7$, para o qual $a \equiv 1 \pmod 7$. Com isso, $\operatorname{mdc}(P(a+2), P(a+4)) = 1$; $P(a+2)$ já é primo com $P(a+1)$, $P(a+3)$ e $P(a+4)$, e só sobra $\operatorname{mdc}(P(a+2), P(a+5)) = 3$, para o qual $a \equiv 2 \pmod 3$; mas vale o mesmo para $P(a+4)$, e $\operatorname{mdc}(P(a+1), P(a+4)) = 3$ implica $a \equiv 0 \pmod 3$, o que é um absurdo. Logo um conjunto fragante tem pelo menos 6 elementos.

Para 6 elementos, podemos formar pares $(a+1, a+5)$, $(a+2, a+4)$, $(a+3, a+6)$, com $a+1 \equiv 7 \pmod{19}$, $a+2 \equiv 2 \pmod 7$ e $a+3 \equiv 1 \pmod 3$. Pelo teorema chinês dos restos, tal valor de a existe.

O caso para 7 é mais tratável que o 5, pois podemos fazer $a+1 \equiv a+4 \equiv a+7 \equiv 1 \pmod 3$, e 3 divide $P(a+1)$, $P(a+4)$ e $P(a+7)$. Aí dá para formar pares mais simétricos com $P(a+2)$ e $P(a+6)$ (fazendo $a+2 \equiv 7 \pmod{19}$) e $P(a+3)$ e $P(a+5)$ (fazendo $a+3 \equiv 2 \pmod 7$).

Como construir exemplos para valores maiores? Para quantidades ímpares, vamos usar simetria: um conjunto fragante com $2k+1$ elementos seria da forma

$$\{P(a-k), P(a-(k-1)), \ldots, P(a), \ldots, P(a+k)\}.$$

Agora: faça $a \equiv 1 \pmod 3$ para a gente não se preocupar com o termo central (e, em geral com r múltiplo de 3), e use simetria: queremos p primo tal que

$$\begin{cases} P(a-r) \equiv 0 \pmod p \\ P(a+r) \equiv 0 \pmod p \end{cases} \iff \begin{cases} (a-r)^2 + a - r + 1 \equiv 0 \pmod p \\ (a+r)^2 + a + r + 1 \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

Fazendo as contas encontramos $r(4r^2+3) \equiv 0 \pmod p$ e $r(2a+1) \equiv 0 \pmod p$, e podemos escolher um divisor primo de $4r^2+3$ e $a \equiv \frac{p-1}{2} \pmod p$. Para $r = 1$, obtemos 7; para $r = 2$, obtemos 19 (que bom!). Para $r = 4$ encontramos 67, e assim por diante. Assim, conseguimos conjuntos fragantes com $2k+1$ elementos, $k \geq 3$.

Para quantidades pares $2k$ de fragantes, podemos tomar um com $2k-1$ elementos, começando em $P(a-(k-1))$ e terminando em $P(a+(k-1))$, $k \geq 4$ (para $k = 3$ já encontramos exemplo) e ajeitamos só

$P(a+k)$. Podemos fazer algo simples para consertar: para $r = 3$ encontramos p divisor de $4\cdot 3^2+3 = 3\cdot 13$, e podemos fazer $P(a+k) \equiv P(a+k-6) \equiv 0 \pmod{13}$, com $a \equiv 6 \pmod{13}$. Para não repetir primo com as outras congruências (entre essas não tem problema repetir), ao escolher divisor de $4r^2+3$, escolhemos um que seja $p \equiv 3 \pmod 4$, pois sabemos que sempre existe. Note que $13 \equiv 1 \pmod 4$. A construção está completa.

Novamente, fica para você escrever uma solução. Toda vez que fizer isso, elimine tudo o que for supérfluo.

5 Resumindo

Estudar casos pequenos/particulares, por mais simples que seja, ajuda a dar informação relevante para o problema, revelando estruturas que podem não ser imediatas. Vamos sistematizar essa ideia.

Casos pequenos/particulares

1. Se for o caso, trocar um número grande (como 100, ou 2025) por uma variável n. Pode ser que propriedades do número sejam relevantes (ser par ou primo, por exemplo), então tome cuidado na hora de generalizar.
2. Identificar que caso particular estudar. Em muitos casos, isso é imediato (uma variável só), mas pode não ser em outros (veja o problema 5 da IMO 2008 acima). Pode ser que o caso particular relevante seja primos, caso o problema envolva divisibilidade; pode ser que haja duas variáveis, e valha a pena só especializar uma delas (veja o mesmo exemplo).
3. Verificar se os casos particulares precisam ser divididos (por exemplo, pares/ímpares ou pelo resto módulo algum número).
4. Estudar os casos pequenos, mesmo que sejam triviais. Conjecturar respostas caso seja necessário. A resposta sugere alguma ideia/técnica? Por exemplo, se a resposta é 2^n vale a pena considerar subconjuntos de um conjunto com n elementos; se é $n!$, considerar permutações; se o caso for primo p e a resposta é $p-1$ pensar em ordem ou mdc, e assim por diante.
5. Comparar casos particulares (por exemplo, $n-1$ com n), com o intuito de observar alguma estrutura ou ideia comum. Se for conveniente, fortalecer ou corrigir conjecturas.
6. Se você não obteve muitas ideias, talvez valha a pena estudar mais alguns casos para ter uma noção melhor da estrutura ou rever os casos calculados anteriormente para ver alguma relação interna, ou rever os casos por algum outro ponto de vista.
7. Usar as ideias e resolver o problema.
8. Importante: tenha sempre na sua mente algumas estruturas prontas: permutações, subconjuntos, árvores, grafos, ciclos (em grafos ou permutações), tabuleiros etc.

6 Problemas

1. Um *DS-set* é um conjunto finito de inteiros positivos em que cada um de seus elementos divide a soma de todos os demais. Prove que todo conjunto finito de inteiros está contido em um DS-set.
2. (Banco IMO 2002/C3) Uma sequência de n inteiros positivos, não necessariamente distintos, é *cheia* quando tem as seguintes propriedades: para $k \geq 2$, se k aparece então $k-1$ também aparece, e $k-1$ aparece pela primeira vez antes de k aparecer pela última vez. Calcule, em função de n, a quantidade de sequências cheias.

3. (IMO 2013/1) Demonstrar que, para qualquer par de inteiros positivos k e n, existem k inteiros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (não necessariamente distintos) tais que:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

4. (IMO 2016/6) Há $n \geq 2$ segmentos no plano tais que cada par de segmentos se intersecta num ponto interior a ambos e não há três segmentos que tenham um ponto em comum. Geoff deve escolher um dos extremos de cada segmento e colocar sobre ele um sapo, virado para o outro extremo. Depois ele baterá palmas $n-1$ vezes. Cada vez que ele bater as mãos, cada sapo saltará imediatamente para a frente até o próximo ponto de interseção sobre o segmento. Os sapos nunca mudam a direção dos seus saltos. Geoff deseja colocar os sapos de tal forma que dois sapos nunca ocupem ao mesmo tempo o mesmo ponto de interseção.

   (a) Prove que se n é ímpar, Geoff sempre tem uma maneira de realizar o seu desejo.

   (b) Prove que se n é par, Geoff nunca realiza o seu desejo.

5. (IMO 2002/1) Seja n um inteiro positivo. Seja T o conjunto de pontos $(x; y)$ no plano onde x e y são inteiros não negativos e $x + y < n$. Cada ponto de T é pintado de vermelho ou azul. Se um ponto $(x; y)$ é vermelho, então todos os pontos $(x'; y')$ com $x' \leq x$ e $y' \leq y$ também são. Um conjunto X é um conjunto de n pontos azuis com abcissas todas diferentes, e um conjunto Y é um conjunto de n pontos azuis com ordenadas todas diferentes. Prove que o número de conjuntos X é igual ao número de conjuntos Y.

6. (Banco IMO 1997/2) Seja $R_1, R_2, \ldots$ a família de sequências definida pelas seguintes regras:

   - $R_1 = (1)$;
   - Se $R_{n-1} = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ então $R_n = (1, 2, \ldots, x_1, 1, 2, \ldots, x_2, \ldots, 1, 2, \ldots, x_s, n)$.

   Por exemplo, $R_2 = (1, 2)$, $R_3 = (1, 1, 2, 3)$ e $R_4 = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4)$. Prove que o k-ésimo termo da esquerda de R_n é 1 se, e somente se, o k-ésimo termo da direita de R_n é diferente de 1.

7. (Banco IMO 1998/12) Para n, k inteiros com $n \geq k \geq 0$, defina $c(n, k)$ recursivamente como

   - $c(n, 0) = c(n, n) = 1$ para todo $n \geq 0$;
   - $c(n+1, k) = 2^k c(n, k) + c(n, k-1)$ para todos $n \geq k \geq 1$.

   Prove que $c(n, n-k) = c(n, k)$ para todos $n \geq k \geq 0$.

8. (Banco IMO 2006/C1) Temos $n \geq 2$ lâmpadas $L_1, L_2, \ldots, L_n$ em fila e cada uma está acesa ou apagada. A cada segundo, a lâmpada L_i muda de estado de acordo com as seguintes regras: se a lâmpada L_i e seus vizinhos (um vizinho se $i = 1$ ou $i = n$ e dois vizinhos caso contrário) estão no mesmo estado, L_i é ou fica apagada; caso contrário, L_i é ou fica acesa. Inicialmente, todas as lâmpadas exceto L_1, a primeira lâmpada da esquerda, está apagada.

   (a) Prove que existem infinitos valores de n para os quais em algum momento todas as lâmpadas ficam apagadas.

   (b) Prove que existem infinitos valores de n para os quais as lâmpadas nunca ficam todas apagadas.

9. (Banco IMO 2008/A4) Para um inteiro m, denote por $t(m)$ o único número de $\{1, 2, 3\}$ para o qual $m + t(m)$ é múltiplo de 3. Uma função $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é tal que $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ e $f(2^n + m) = f(2^n - t(m)) - f(m)$ para todos os inteiros $m, n \geq 0$ com $2^n > m$. Prove que $f(3k) \geq 0$ para todo inteiro $k \geq 0$.

10. (Banco IMO 2008/C2) Seja n inteiro positivo e A_n o conjunto de permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ para os quais k divide $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ para todo $1 \leq k \leq n$. Encontre o número de elementos de A_n.

11. (APMO 2024/3) Sejam n um inteiro positivo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \left(\frac{2}{1+a_i} \right)^{2^i} \geq \frac{2}{1 + a_1 a_2 \dots a_n} - \frac{1}{2^n}.$$

12. (IMO 2019/5) O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k > 0$ moedas mostrando H, então ele vira a k-ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n = 3$ o processo começando com a configuração THT é $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que acaba depois de três operações.
    (a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações.
    (b) Para cada configuração inicial C, seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT) = 3$ e $L(TTT) = 0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C.

13. (Banco IMO 2010/A4) Uma sequência $x_1, x_2, \dots$ é definida por $x_1 = 1$, $x_{2k} = -x_k$ e $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$ para todo $k \geq 1$. Prove que, para todo $n \geq 1$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$.

14. (IMO 2016/5) No quadro está escrita a equação

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

que tem 2016 fatores lineares de cada lado. Determine o menor valor possível de k para o qual é possível apagar exatamente k destes 4032 fatores lineares, de modo que fique pelo menos um fator de cada lado e que a equação resultante não admita nenhuma solução real.

15. (IMO 2013/6) Seja $n \geq 3$ um número inteiro. Considera-se uma circunferência na qual estão marcados $n+1$ pontos igualmente espaçados. A cada ponto atribui-se um dos números $0, 1, \dots, n$ de modo que cada número é usado exatamente uma vez; duas atribuições de números consideram-se a mesma se uma pode ser obtida da outra por uma rotação da circunferência. Uma atribuição de números chama-se *bonita* se, para quaisquer quatro números $a < b < c < d$ com $a + d = b + c$, a corda que une os pontos correspondentes a a e a d não interseta a corda que une os pontos correspondentes a b e a c.

    Sejam M o número de atribuições bonitas e N o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos tais que $x + y \leq n$ e $\mathrm{mdc}(x, y) = 1$. Demonstrar que

$$M = N + 1.$$

16. (IMO 2023/3) Para cada inteiro $k \geq 2$, determine todas as sequências infinitas de inteiros positivos $a_1, a_2, \dots$ para as quais existe um polinômio P da forma $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, em que $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ são inteiros não negativos, tal que

$$P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

17. (Banco IMO 2007/N7) Sendo p um primo e n inteiro não negativo, seja $f_p(n)$ a quantidade de fatores p na fatoração em primos de $n!$. Dados um inteiro positivo d e um conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ um conjunto com k primos, mostre que existem infinitos inteiros positivos n para os quais d divide $f_{p_i}(n)$ para todo i, $1 \leq i \leq k$.

18. Escreva as soluções de todos os exemplos e problemas que só têm rascunho.