

Pequenos casos, grandes soluções

Carlos Shine

1 Problemas

1. Um *DS-set* é um conjunto finito de inteiros positivos em que cada um de seus elementos divide a soma de todos os demais. Prove que todo conjunto finito de inteiros está contido em um DS-set.
2. (Banco IMO 2002/C3) Uma sequência de n inteiros positivos, não necessariamente distintos, é *cheia* quando tem as seguintes propriedades: para $k \geq 2$, se k aparece então $k-1$ também aparece, e $k-1$ aparece pela primeira vez antes de k aparecer pela última vez. Calcule, em função de n , a quantidade de sequências cheias.
3. (IMO 2013/1) Demonstrar que, para qualquer par de inteiros positivos k e n , existem k inteiros positivos $m_1, m_2, \dots, m_k$ (não necessariamente distintos) tais que:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

4. (IMO 2016/6) Há $n \geq 2$ segmentos no plano tais que cada par de segmentos se intersecta num ponto interior a ambos e não há três segmentos que tenham um ponto em comum. Geoff deve escolher um dos extremos de cada segmento e colocar sobre ele um sapo, virado para o outro extremo. Depois ele baterá palmas $n-1$ vezes. Cada vez que ele bater as mãos, cada sapo saltará imediatamente para a frente até o próximo ponto de interseção sobre o segmento. Os sapos nunca mudam a direção dos seus saltos. Geoff deseja colocar os sapos de tal forma que dois sapos nunca ocupem ao mesmo tempo o mesmo ponto de interseção.

(a) Prove que se n é ímpar, Geoff sempre tem uma maneira de realizar o seu desejo.

(b) Prove que se n é par, Geoff nunca realiza o seu desejo.

5. (IMO 2002/1) Seja n um inteiro positivo. Seja T o conjunto de pontos $(x; y)$ no plano onde x e y são inteiros não negativos e $x + y < n$. Cada ponto de T é pintado de vermelho ou azul. Se um ponto $(x; y)$ é vermelho, então todos os pontos $(x'; y')$ com $x' \leq x$ e $y' \leq y$ também são. Um conjunto X é um conjunto de n pontos azuis com abscissas todas diferentes, e um conjunto Y é um conjunto de n pontos azuis com ordenadas todas diferentes. Prove que o número de conjuntos X é igual ao número de conjuntos Y .

6. (Banco IMO 1997/2) Seja $R_1, R_2, \dots$ a família de sequências definida pelas seguintes regras:

- $R_1 = (1)$;
- Se $R_{n-1} = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ então $R_n = (1, 2, \dots, x_1, 1, 2, \dots, x_2, \dots, 1, 2, \dots, x_s, n)$.

Por exemplo, $R_2 = (1, 2)$, $R_3 = (1, 1, 2, 3)$ e $R_4 = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4)$. Prove que o k -ésimo termo da esquerda de R_n é 1 se, e somente se, o k -ésimo termo da direita de R_n é diferente de 1.

7. (Banco IMO 1998/12) Para n, k inteiros com $n \geq k \geq 0$, defina $c(n, k)$ recursivamente como

- $c(n, 0) = c(n, n) = 1$ para todo $n \geq 0$;
- $c(n+1, k) = 2^k c(n, k) + c(n, k-1)$ para todos $n \geq k \geq 1$.

Prove que $c(n, n - k) = c(n, k)$ para todos $n \geq k \geq 0$.

8. (Banco IMO 2006/C1) Temos $n \geq 2$ lâmpadas $L_1, L_2, \dots, L_n$ em fila e cada uma está acesa ou apagada. A cada segundo, a lâmpada L_i muda de estado de acordo com as seguintes regras: se a lâmpada L_i e seus vizinhos (um vizinho se $i = 1$ ou $i = n$ e dois vizinhos caso contrário) estão no mesmo estado, L_i é ou fica apagada; caso contrário, L_i é ou fica acesa. Inicialmente, todas as lâmpadas exceto L_1 , a primeira lâmpada da esquerda, está apagada.
 - (a) Prove que existem infinitos valores de n para os quais em algum momento todas as lâmpadas ficam apagadas.
 - (b) Prove que existem infinitos valores de n para os quais as lâmpadas nunca ficam todas apagadas.
9. (Banco IMO 2008/A4) Para um inteiro m , denote por $t(m)$ o único número de $\{1, 2, 3\}$ para o qual $m + t(m)$ é múltiplo de 3. Uma função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é tal que $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ e $f(2^n + m) = f(2^n - t(m)) - f(m)$ para todos os inteiros $m, n \geq 0$ com $2^n > m$. Prove que $f(3k) \geq 0$ para todo inteiro $k \geq 0$.
10. (Banco IMO 2008/C2) Seja n inteiro positivo e A_n o conjunto de permutações $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ para os quais k divide $2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ para todo $1 \leq k \leq n$. Encontre o número de elementos de A_n .
11. (APMO 2024/3) Sejam n um inteiro positivo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos. Prove que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \left(\frac{2}{1 + a_i} \right)^{2^i} \geq \frac{2}{1 + a_1 a_2 \dots a_n} - \frac{1}{2^n}.$$

12. (IMO 2019/5) O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k > 0$ moedas mostrando H , então ele vira a k -ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n = 3$ o processo começando com a configuração THT é $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, que acaba depois de três operações.
 - (a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações.
 - (b) Para cada configuração inicial C , seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT) = 3$ e $L(TTT) = 0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C .
13. (Banco IMO 2010/A4) Uma sequência $x_1, x_2, \dots$ é definida por $x_1 = 1$, $x_{2k} = -x_k$ e $x_{2k-1} = (-1)^{k+1}x_k$ para todo $k \geq 1$. Prove que, para todo $n \geq 1$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 0$.
14. (IMO 2016/5) No quadro está escrita a equação

$$(x - 1)(x - 2) \cdots (x - 2016) = (x - 1)(x - 2) \cdots (x - 2016)$$

que tem 2016 fatores lineares de cada lado. Determine o menor valor possível de k para o qual é possível apagar exatamente k destes 4032 fatores lineares, de modo que fique pelo menos um fator de cada lado e que a equação resultante não admita nenhuma solução real.

15. (IMO 2013/6) Seja $n \geq 3$ um número inteiro. Considera-se uma circunferência na qual estão marcados $n + 1$ pontos igualmente espaçados. A cada ponto atribui-se um dos números $0, 1, \dots, n$ de modo que cada número é usado exatamente uma vez; duas atribuições de números consideram-se a mesma se uma pode ser obtida da outra por uma rotação da circunferência. Uma atribuição de números chama-se *bonita* se, para quaisquer quatro números $a < b < c < d$ com $a + d = b + c$, a corda que une os pontos correspondentes a a e d não intersesta a corda que une os pontos correspondentes a b e c .

Sejam M o número de atribuições bonitas e N o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos tais que $x + y \leq n$ e $\text{mdc}(x, y) = 1$. Demonstrar que

$$M = N + 1.$$

16. (IMO 2023/3) Para cada inteiro $k \geq 2$, determine todas as sequências infinitas de inteiros positivos $a_1, a_2, \dots$ para as quais existe um polinômio P da forma $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$, em que $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ são inteiros não negativos, tal que

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

17. (Banco IMO 2007/N7) Sendo p um primo e n inteiro não negativo, seja $f_p(n)$ a quantidade de fatores p na fatoração em primos de $n!$. Dados um inteiro positivo d e um conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ um conjunto com k primos, mostre que existem infinitos inteiros positivos n para os quais d divide $f_{p_i}(n)$ para todo i , $1 \leq i \leq k$.
18. Escreva as soluções de todos os exemplos e problemas que só têm rascunho.