Problemas legais envolvendo polinômios

28^a SO

Thiago Dk
DM - UFRPE

1. (Rússia 2016) Seja n um inteiro positivo e sejam $k_0, k_1, \dots, k_{2n}$ inteiros não nulos tais que $k_0 + k_1 + \dots + k_{2n} \neq 0$. É sempre possível encontrar uma permutação $(a_0, a_1, \dots, a_{2n})$ de $(k_0, k_1, \dots, k_{2n})$ de modo que a equação

$$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_0 = 0$$

não tenha raízes inteiras?

2. (Iran 2017) Encontre todos os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ com coeficientes reais tais que

$$P(Q(x)) = P(x)^{2017}$$

para todos os números reais x .

3. (Rússia 2017) Seja $P(x)$ um polinômio de grau $n \geq 2$ com coeficientes não negativos. Se a, b, c são lados de um triângulo, prove que

$$\sqrt[n]{P(a)}, \quad \sqrt[n]{P(b)}, \quad \sqrt[n]{P(c)}$$

também são lados de algum triângulo.

4. (China 99) Determine o valor máximo de λ tal que, se $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ é um polinômio cúbico cujas raízes são todas não negativas, então

$$f(x) \geq \lambda(x - a)^3$$

para todo $x \geq 0$. Encontre a condição de igualdade.

5. (Sérvia 2020) Encontre todos os polinômios mônicos $P(x)$ tais que o polinômio $P(x)^2 - 1$ seja divisível pelo polinômio $P(x + 1)$.
6. (Sérvia 2018) Prove que existe um único polinômio $P(x)$ com coeficientes reais tal que

$$xy - x - y \mid (x + y)^{1000} - P(x) - P(y)$$

para todos os números reais x, y .

7. (Iran 2024) Dada uma sequência de inteiros positivos $\{x_k\}_{k \geq 1}$ tal que $x_1 = 1$ e, para todo $n \geq 1$, temos

$$x_{n+1}^2 + P(n) = x_n x_{n+2},$$

onde $P(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros não negativos. Prove que $P(x)$ é um polinômio constante.

8. (Rússia 2019) Seja $P(x)$ um polinômio não constante com coeficientes inteiros e seja n um inteiro positivo. A sequência $a_0, a_1, \dots$ é definida da seguinte maneira:

$$a_0 = n \quad \text{e} \quad a_k = P(a_{k-1}) \quad \text{para todo inteiro positivo } k.$$

Suponha que, para todo inteiro positivo b , a sequência contenha uma potência b -ésima de um inteiro maior que 1. Mostre que $P(x)$ é linear.

9. (Shortlist A6) Sejam $m, n \geq 2$ inteiros. Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio com coeficientes reais tal que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left\lfloor \frac{x_1 + \dots + x_n}{m} \right\rfloor$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$. Prove que o grau total de f é pelo menos n .