EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Portuguese**

Day: **1**

Domingo, 13 de abril de 2025

Problema 1. Para um inteiro positivo N, sejam $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ todos os inteiros positivos menores que N que são coprimos com N. Encontre todos os $N \geq 3$ tais que

$$\mathrm{mdc}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

para todo $1 \leq i \leq m-1$.

Aqui $mdc(a, b)$ *é o maior inteiro positivo que divide ambos* a *e* b*. Inteiros* a *e* b *são coprimos se* $mdc(a, b) = 1$*.*

Problema 2. Uma sequência infinita crescente $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ de inteiros positivos é chamada *central* se, para qualquer inteiro positivo n, a média aritmética dos primeiros a_n termos da sequência é igual à a_n.

Prove que existe uma sequência infinita b_1, b_2, b_3, $\ldots$ de inteiros positivos tal que, para toda sequência central a_1, a_2, a_3, $\ldots$, há infinitos inteiros positivos n com $a_n = b_n$.

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo. Os pontos B, D, E, e C estão sobre uma reta, nesta ordem, e satisfazem $BD = DE = EC$. Sejam M e N os pontos médios de AD e AE, respectivamente. Suponha que o triângulo ADE é agudo, e seja H o ortocentro dele. Os pontos P e Q estão nas retas BM e CN, respectivamente, de modo que D, H, M, e P estão sobre uma mesma circunferência e são todos diferentes, e E, H, N, e Q estão sobre uma mesma circunferência e são todos diferentes. Prove que P, Q, N, e M estão sobre uma mesma circunferência.

O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das alturas dele.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Segunda-feira, 14 de abril de 2025

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo com incentro I e $AB \neq AC$. Considere que as retas BI e CI intersectam o circuncírculo de ABC em $P \neq B$ e $Q \neq C$, respectivamente. Considere pontos R e S tais que $AQRB$ e $ACSP$ são paralelogramos (com $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, e $AP \parallel CS$). Seja T o ponto de intercessão das retas RB e SC. Prove que os pontos R, S, T, e I estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 5. Seja $n > 1$ um inteiro. Em uma *configuração* de um tabuleiro $n \times n$, cada uma das n^2 casas contém uma seta, apontando para cima, para baixo, para a esquerda ou para a direita. Dada uma configuração inicial, o caracol Turbo começa em uma casa do tabuleiro e viaja de casa em casa. Em cada movimento, Turbo se move por uma unidade na direção indicada pela seta na casa dele (possivelmente saindo do tabuleiro). Depois de cada movimento, as setas em todas as casas rotacionam $90°$ no sentido anti-horário. Dizemos que uma casa é *boa* se, começando dessa casa, Turbo visita cada casa do tabuleiro exatamente uma vez, sem sair do tabuleiro, e retorna à casa inicial no final. Determine, em termos de n, o número máximo de casas boas sobre todas as configurações iniciais possíveis.

Problema 6. Em cada casa de um tabuleiro 2025×2025, está escrito um número real não negativo de tal forma que a soma dos números em cada linha é 1, e a soma dos números em cada coluna é 1. Defina r_i como o maior valor na linha i, e seja $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Similarmente, defina c_i o maior valor na coluna i, e seja $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.
Qual é o maior valor possível de $\frac{R}{C}$?

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos