

PROPOSTA DE PROVA:
6ª Competição
Elon Lages Lima de Matemática - 2025

08 de Junho - 2025

1. Qual a maior potência de 3 que divide um número da forma

$$f(n) = n^3 + 6n + 11,$$

com n inteiro?

(a) 3^1

(b) 3^2

(c) 3^3

(d) 3^5

(e) 3^6

2. Sendo $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^3 = 1$ e $w \neq 1$, podemos afirmar que o valor de

$$\cos \left[\left((1-w)(1-w^2) + (2-w)(2-w^2) + \dots + (10-w)(10-w^2) \right) \frac{\pi}{900} \right]$$

é igual a:

(a) 0.

(b) 1.

(c) -1 .

(d) $\frac{1}{2}$.

(e) $\frac{\sqrt{33}}{12}$.

3. O valor da integral $\int_{-2}^0 (x^3 + 3x^2 + 3x + (x + 1) \cos(x + 1)) dx$ é:

(a) 1.

(b) 2.

(c) -1 .

(d) -2 .

(e) 0.

4. A sequência $(a_k)_{k \geq 0}$ é tal que $a_0 = 0$, $a_{2n-1} = a_{2n-2} + n$ e $a_{2n} = a_{2n-1} + n$, para todo inteiro $n \geq 1$. Se

$$Q = \{k \in \mathbb{Z}_+; a_k \text{ é quadrado perfeito}\},$$

pode-se afirmar que:

(a) $2024 \in Q$.

(b) $2025 \notin Q$.

(c) Q é finito.

(d) Q contém infinitos números pares.

(e) Q contém infinitos números ímpares.

5. Dado $\cos \theta = 1/3$, encontre o valor de

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{2^n}.$$

(a) $\frac{10}{11}$.

(b) $\frac{4\sqrt{3}}{11}$.

(c) $\frac{6}{25}$.

(d) $\frac{18}{5}$.

(e) $\frac{67}{12}$.

6. Sejam $\rho_k > 0$ e $z_k = \rho_k(\cos \alpha_k + i \operatorname{sen} \alpha_k)$ para $k = 1, 2, 3$ tais que

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$$

Se A_k é um ponto do plano complexo (afixo) correspondente ao número

$$w_k = \frac{\cos(2\alpha_k) + i \operatorname{sen}(2\alpha_k)}{z_k} \quad \text{para } k = 1, 2, 3.$$

Podemos afirmar que a origem 0 do plano complexo corresponde ao:

(a) Incentro do triângulo $\Delta A_1 A_2 A_3$.

(b) Ortocentro do triângulo $\Delta A_1 A_2 A_3$.

(c) Circuncentro do triângulo $\Delta A_1 A_2 A_3$.

(d) Baricentro do triângulo $\Delta A_1 A_2 A_3$.

(e) Ex-incentro do triângulo $\Delta A_1 A_2 A_3$.

7. Sejam $f_0, f_1, f_2, \dots$ funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(\lambda x) = \lambda^n f_n(x) \quad \text{e} \quad f_n(x+y) = \sum_{0 \leq i \leq n} f_i(x) \cdot f_{n-i}(y)$$

para todos $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ e $n = 0, 1, 2, \dots$. Sabendo que $f_1(x)$ é inteiro quando x é inteiro, então o menor valor inteiro positivo que $f_{10}(10)$ pode assumir é

(a) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^{10}$

(b) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^{10}$

(c) $2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^8 \cdot 7^9$

(d) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

(e) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 7^8$

8. O limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos^2 x)}{x^2}$ é igual a:

(a) π .

(b) 1.

(c) 0.

(d) $\frac{1}{2}$.

(e) 2.

9. Podemos afirmar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$ é igual a:

(a) 1.

(b) $\frac{2}{3}$.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) e.

(e) e^2 .

10. Se $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$, com $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ para todo inteiro positivo n , então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ é igual a:

(a) $\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $3\sqrt{3}$

(d) 1

(e) $\frac{3}{2}$

11. O valor da integral

$$I = \int_0^{4\pi} \frac{x \cos x \, dx}{1 + \sin^2 x}$$

é igual a:

(a) 2π .

(b) 2.

(c) π .

(d) 1.

(e) 0.

12. Para $n \geq 2$ inteiro, seja S_n o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $0 < x, y < 1$ são reais e $x + ny$ e $nx + y$ são ambos inteiros. Assinale a opção que corresponde ao número de elementos de S_n :

(a) n .

(b) $n - 2$.

(c) n^2 .

(d) $n^2 - 2$.

(e) $2n$.

13. Sejam V um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão 7 e $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que $T = \lambda \cdot I$ (onde I é o operador identidade em V). Se $\lambda = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, podemos afirmar que:

(a) $(T^2 + T + I)^4 = 0$.

(b) $(T^2 + T + I)^4 = I$.

(c) $(T^2 + T + I)^4 = 2I$.

(d) $(T^2 + T + I)^4 = 3I$.

(e) $(T^2 + T + I)^4 = I$.

14. Dada uma ordenação dos números $1, 2, \dots, n$ em fila, uma transposição é uma troca de posição de dois deles. Por exemplo, nas listas a seguir, trocamos primeiro as posições de $\{2, 3\}$ e, depois, as de $\{2, 6\}$:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \rightarrow 1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6 \rightarrow 1\ 3\ 6\ 4\ 5\ 2.$$

Sejam S_6 o conjunto de todas as permutações σ do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f(\sigma)$ o número mínimo de transposições necessárias para transformar σ na permutação $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$. Encontre o valor de

$$S = \sum_{\sigma \in S_6} f(\sigma).$$

(a) 5040.

(b) 4320.

(c) 2556.

(d) 1764.

(e) 1200.

15. Quantas funções $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ existem satisfazendo

$$f(x + 19) = f(x) \quad \text{e} \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{Z}?$$

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

(e) 5

16. Dados dois pontos no plano $A = (x, y)$ e $B = (z, w)$, definimos o ponto $m(A, B)$ do plano como sendo

$$m(A, B) = (xz - yw, yz + xw)$$

Definimos uma sequência de pontos do plano $P_0, P_1, P_2, \dots$ recursivamente da seguinte maneira:

$$P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_{n+1} = m(P_n, P_n) \text{ para } n \geq 0$$

Então P_{2025} é

(a) $(1, 0)$

(b) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

17. Seja R o conjunto de todos os pontos (a, b) do plano tais que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a - 33b$ é um múltiplo de 109. Qual a menor distância entre dois pontos distintos de R ?

(a) $\sqrt{109}$

(b) $2\sqrt{109}$

(c) $\sqrt{109}/2$

(d) $\sqrt{33}$

(e) $16\sqrt{33}$

18. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ as três raízes de $x^3 + 3x + 12 = 0$. Se

$$S = \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_1^2$$

então S satisfaz:

(a) $S^2 - 36S + 1323 = 0$.

(b) $S^2 - 42S - 144 = 0$.

(c) $S^2 - 12S - 2705 = 0$.

(d) $S^2 - 36S - 540 = 0$.

(e) $S^2 + 36S - 144 = 0$.

19. Seja $(G, \cdot)$ um grupo com elemento neutro e . Considere $a, b \in G$ tais que $a^4 = e$ e $a^2ba^{-2} = b^4$. Quais das seguintes afirmações necessariamente é verdadeira?

(a) $b^2 = 1$.

(b) $b^4 = 1$.

(c) $b^{14} = e$.

(d) $b^{15} = e$.

(e) $b^{16} = e$.

20. Uma pulga, partindo da origem $(0, 0)$, move-se sobre os pontos do plano $\mathbb{R}^2$ com ambas as coordenadas inteiras. A cada segundo, a pulga pula do ponto (x, y) para o ponto $(x + 1, y)$ com probabilidade $\frac{2}{3}$ ou para o ponto $(x, y + 1)$ com probabilidade $\frac{1}{3}$. Se a pulga atinge um ponto da reta $y = x + 1$, ela para. Qual a probabilidade de a pulga nunca parar de pular?

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{6}$

(d) $\frac{1}{12}$

(e) $\frac{1}{15}$

21. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = \left(\frac{5x - y - 2z}{2}, \frac{x - y + 2z}{2}, \frac{x + y}{2} \right)$$

que possui autovetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, -1)$ e $v_3 = (3, 1, 1)$ (acredite em mim, é verdade). Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são escalares tais que (aqui I denota a identidade)

$$a \cdot (T \circ T) + b \cdot T + c \cdot I$$

é uma projeção (não necessariamente ortogonal) de $\mathbb{R}^3$ sobre um plano, qual o maior valor possível de a ?

(a) $a = -\frac{1}{3}$

(b) $a = 2$

(c) $a = -\frac{1}{6}$

(d) $a = \frac{1}{2}$

(e) $a = 1$

22. Se A e B são matrizes de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tais que $B^2 = I$ e $A^2 = AB + I$, encontre o valor máximo de $\det(A)$.

(a) $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

(b) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

(c) $\sqrt{5}$.

(d) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

(e) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

23. Seja $s(n)$ o número de soluções de

$$x^2 + 2xy + 3y^2 \leq n, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(2n)}{s(n)}$ vale:

(a) $\sqrt{2}$.

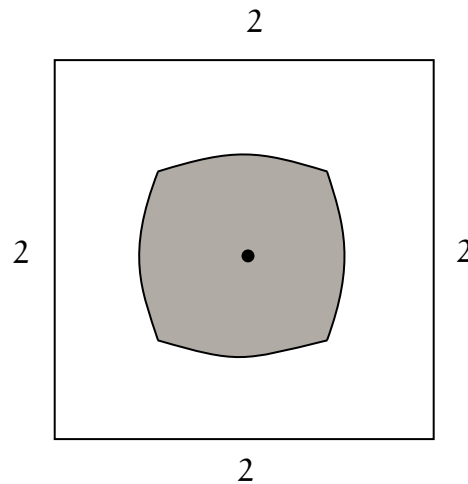
(b) $\frac{4}{3}$.

(c) $\frac{7}{\sqrt{8}}$.

(d) 2.

(e) $\frac{9}{4}$.

24. A figura a seguir mostra um quadrado de lado 2 e uma região sombreada S que corresponde ao conjunto de todos os pontos internos ao quadrado que estão mais próximos do centro do que dos lados do quadrado.



A medida da área da região S é:

(a) $\frac{2}{3}(5\sqrt{2} - 3)$.

(b) $\frac{1}{3}(6\sqrt{2} - 5)$.

(c) $\frac{4}{3}(4\sqrt{2} - 5)$.

(d) $\frac{2}{3}(4\sqrt{2} - 1)$.

(e) $\frac{7}{3}(4\sqrt{2} - 15)$.

25. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 com entradas em $\mathbb{F}_{11} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{10}\}$ (o corpo dos inteiros módulo 11) são tais que $A^3 = I$? Aqui I denota a matriz identidade.

(a) $1 + 11^3 \cdot (11^3 - 1)$

(b) $11^3 - 11^2$

(c) $1 + (11^3 - 1)(11^2 - 1)$

(d) $1 + (11^3 - 1)(11^2 - 11)$

(e) $1 + \frac{11^3(11^3 - 1)}{2}$

Gabarito

1 (A) (B) (C) (D) (E)

2 (A) (B) (C) (D) (E)

3 (A) (B) (C) (D) (E)

4 (A) (B) (C) (D) (E)

5 (A) (B) (C) (D) (E)

6 (A) (B) (C) (D) (E)

7 (A) (B) (C) (D) (E)

8 (A) (B) (C) (D) (E)

9 (A) (B) (C) (D) (E)

10 (A) (B) (C) (D) (E)

11 (A) (B) (C) (D) (E)

12 (A) (B) (C) (D) (E)

13 (A) (B) (C) (D) (E)

14 (A) (B) (C) (D) (E)

15 (A) (B) (C) (D) (E)

16 (A) (B) (C) (D) (E)

17 (A) (B) (C) (D) (E)

18 (A) (B) (C) (D) (E)

19 (A) (B) (C) (D) (E)

20 (A) (B) (C) (D) (E)

21 (A) (B) (C) (D) (E)

22 (A) (B) (C) (D) (E)

23 (A) (B) (C) (D) (E)

24 (A) (B) (C) (D) (E)

25 (A) (B) (C) (D) (E)